Synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches

Propriétés asymptotiques de processus stochastiques

Auteur:
Dr. Brice Franke

Affiliation:
Université Paris Ouest, Nanterre La Défense, Laboratoire Modal X

Section:
Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques (26)

Soutenance:
25. Novembre 2010

Jury:
Christian Léonard (Université Paris Ouest), Parrain
Thomas Mikosch (University of Copenhagen), Rapporteur
Martin Hairer (Warwick University), Rapporteur
Florence Merlevede (Université Paris Est, Marne La Vallée)
Paul Doukhan (Université Cergy Pontoise)
Philippe Soulier (Université Paris Ouest)
Olivier Raimond (Université Paris Ouest)

1 Curriculum Vitae de Brice Franke

Coordonnées:

Laboratoire Modal X
Université Paris Ouest
200 avenue de la République
92000 Nanterre, France

Téléphone:	0033-140977847
Fax:	0033-140977142
e-Mail:	Brice.Franke@rub.de

État Civil:

Sexe:	masculin
Nationalité:	Allemand
Date de naissance:	19 Novembre 1970
Lieu de naissance:	Regensburg, République Fédérale d'Allemagne
Mère:	Gisèle Franke-Pinson (Française)
Père:	Rainer Franke (Allemand)
Situation de famille:	marié depuis le 28 Septembre 2000; un enfant (Céleste)
Épouse:	Huai-Yao Huang (Taiwanaise)

Études:

1977-1981	fréquentation de l'école-primaire Lüdertal-Schule à Großenlüder (circonsciption de Fulda)
1981-1990	fréquentation du lycée Winfriedschule à Fulda
1990-1991	service militaire à Hessisch-Lichtenau (Hessen)
1991-1992	études de géologie à l'Université de Göttingen
1992-2000	études de mathématiques à l'Université de Göttingen

Diplômes:

11.06.1990	baccalauréat (Abitur) obtenu au lycée Winfriedschule à Fulda
06.02.1998	diplôme de mathématiques de l'Université de Göttingen (directeur de thèse: Prof. M. Denker)
02.11.2000	doctorat de sciences (Dr. rer. nat.) de l'Université de Göttingen (directeur de thèse: Prof. M. Denker)

Thèse:
Titre: Heat Content Inequalities for Diffusions on Manifolds
Directeur de thèse: Prof. M. Denker *Rapporteur:* Prof. H. Hering
Examinateurs: Prof. M. Denker, Prof. H. Hering, Prof. D. Buchholz
Autres membres du jury: Prof. S.J. Paterson, Prof. S. Waack
Publication: Mathematica Gottingensis, No. 2, (2001)

Emplois:

08.1998-09.2000	collaborateur scientifique à l'institut de sciences stochastiques et statistiques de l'université de Göttingen (demi poste)
10.2000-04.2002	collaborateur scientifique à l'institut de mathématiques de la Ruhr-Universität à Bochum
05.2002-08.2010	assistant scientifique à l'institut de mathématiques de la Ruhr-Universität à Bochum
depuis 09.2010	maître de conférences à l'Université Paris Ouest

Missions Scientifiques:

09.1998-08.1999	boursier DAAD à Indiana University (Bloomington, E.U.) *hôte:* Prof. R. Bhattacharya
03.2006-02.2007	boursier DFG à l'Academia Sinica (Taipei, Taiwan) *hôtes:* Prof. C.-R. Hwang et Prof. S.-J. Sheu
03.2007-02.2008	postdoc à l'Academia Sinica (Taipei, Taiwan) *hôtes:* Prof. C.-R. Hwang et Prof. S.-J. Sheu

Enseignement:

Durant mes emplois comme assistant et collaborateur scientifique au sein des Universités de Göttingen et de Bochum enseigner faisait partie de mes engagements. Ma responsabilité était l'organisation de travaux dirigés, qui accompagnent les cours de probabilités et de statistique (de tous niveaux). Dans ce cadre j'ai été chargé du choix et de la préparation des exercices et de l'enseignement dans les cours de travaux dirigés. J'ai aussi eu l'occasion de donner des cours d'analyse stochastique pendant un semestre à l'université de la Ruhr à Bochum. Durant les années 2009 et 2010 j'ai été responsable de plusieurs étudiants de thèse qui écrivaient leurs thèse sous la direction du Professeur Dehling. De ces coopérations sont sorties deux manuscripts avec Thomas Kott, dont un a jusque à présent été accepté pour la publication.

Connaissances Linguistiques:

Allemand (langue paternelle)
Français (langue maternelle)
Anglais (bonne connaissance)

Cours donnés à la RUB entre 2000 et 2010

00/01: travaux dirigés en probabilité élémentaire
01: travaux dirigés en processus de Markov et en probabilité pour enseignant
01/02: travaux dirigés en probabilité I
02: cours d'analyse stochastique
02/03: travaux dirigés en probabilité élémentaire
03: travaux dirigés en statistique I
03/04: travaux dirigés en probabilité I
04: travaux dirigés en probabilité II + travaux dirigés en analyse III
04/05: travaux dirigés en probabilité élémentaire
05: travaux dirigés en statistique I + séminaire sur les processus de Markov
05/06: travaux dirigés en algèbre linéaire I
08: travaux dirigés pour ingénieurs en mathématiques II
08/09: travaux dirigés pour ingénieurs en probabilité et statistique
09: séminaire sur algèbre linéaire
09/10: séminaire sur les processus de Markov
10: travaux dirigés en statistique I

Conférences Internationales:

1) International Conference on Elliptic and Parabolic Problems: Recent Advances, National Center for Theoretical Sciences, Hsinchu, Taiwan (Février 2004).

2) Workshop on Probability with Applications, National Taiwan University, Taipei, Taiwan (Juin 2006).

3) Stochastic Analysis and Applications, German-Japanese Symposium, RIMS, Kyoto, Japon (Septembre 2006).

4) Mathematical Meeting and Annual Meeting of the Taiwan Mathematical Society, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, (Décembre 2006)

5) Fifth Workshop on Markov-Processes and Related Topics, Beijing Normal University, Pékin, Chine (Juillet 2007).

6) Mathematical Meeting and Annual Meeting of the Taiwan Mathematical Society, Academia Sinica, Taipei, Taiwan, (Décembre 2007)

7) Workshop on Stochastic Dynamics, Taida Institute of Mathematical Sciences, Taipei, Taiwan, (Janvier 2008)

8) Conference in Memory of Walter Philipp, TU Graz, (Juin 2009).

9) Workshop on Stochastic and Finance, National Center for Theoretical Sciences, Hsinchu Taiwan, (Décembre 2009).

10) German Open Conference on Probability and Statistics, Universität Leipzig, (Mars 2010).

2 Publications:

2.1 Manuscrits Publiés

[1] Integral inequalities for the fundamental solutions of diffusions on manifolds with divergence-free drift, *Mathematische Zeitschriften*, 246, (2004), 373-403 .

[2] About the decay of vorticity in a two-dimensional incompressible viscous fluid, *Semigroup Forum*, 69, (2004), 303-316.

[3] A functional central limit theorem for diffusions on periodic submanifolds of R^N, *Probability Theory and Related Fields*, 133, (2005), 236-244

[4] The scaling limit behavior of periodic stable-like processes, *Bernoulli*, 12, (2006), 551-570. Correction to: The scaling limit behavior of periodic stable-like processes, *Bernoulli*, 13, (2007), 600.

[5] On the decay of the solutions of second order parabolic equations with Dirichlet conditions, *Mathematische Nachrichten*, 280, (2007), 851-865.

[6] A Lévy process whose jumps are dragged by a spherical dynamical system, *Journal of Applied Probability*, 44, (2007), 732-741.

[7] A functional non-central limit theorem for jump-diffusions with periodic coefficients driven by stable Levy-noise, *Journal of Theoretical Probability*, 20, (2007), 1087-1100.

[8] Homogenization of random transport along periodic two dimensional flows, *Stochastic Processes and their Applications*, 119, (2009), 327-346.

[9] avec T. Saigo: The extremes of a random scenery as seen by a random walk in a random environment, *Statistics and Probability Letters*, 79, (2009), 1025-1030.

[10] avec T. Saigo: The extremes of random walks in random sceneries, *Advances in Applied Probability*, 41, (2009), 452-468.

[11] avec C.-R. Hwang, H.-M. Pai, S.-J. Sheu: The behavior of the spectral gap under growing drift, *Transactions of the American Mathematical Society*, 362, (2010), 1325-1350.

[12] avec T. Saigo: A selfsimilar process arising from a random walk in random environment with random scenery *Bernoulli*, 16, (2010), 825-857.

[13] Limit theorems for a recursive maximum process with location-dependent periodic intensity-parameter, (manuscrit accepté par *Extremes*)

[14] avec H. Dehling, T. Kott: Drift estimtaion for a periodic mean-reversion process (manuscrit accepté par *Statistical Inference for Stochastic Processes*).

2.2 Autres Manuscrits:

[15] avec M. Stolz: A duality result for the worst case value at risk for a sum of dependent random variables with known covariances.

[16] avec T. Kott: Parameter estimation for the drift of a time-inhomogeneous jump diffusion process.

2.3 Manuscrits en préparation:

[17] avec S.-J. Sheu: The resolvent of a drift-accelerated diffusion.

[18] Averaging and homogenization of stable-like diffusions with fastly oscillating coefficients.

3 Remerciements

Beaucoup de gens ont contribué d'une façon ou d'une autre au succès de mon projet d'habilitation. Je voudrais leur faire part de ma sincère gratitude. Tout d'abord j'aimerais remercier les deux rapporteurs de cette thèse, Thomas Mikosch et Martin Hairer, pour l'avoir étudiée avec beaucoup de soin et pour avoir fait le déplacement à Paris afin d'assister à la soutenance de mon habilitation le 25 Novembre 2010. J'éprouve aussi beaucoup de gratitude envers les autres membres du jury, Florence Merlevede, Philippe Soulier, Paul Doukhan et Olivier Raymond, pour s'être déclarés prêts sans hésitation à faire partie de mon jury. En particulier je veux remercier mon parrain, Christian Léonard, pour m'avoir prêté assistance avec beaucoup de patience pendant la longue démarche administrative qui a précédé la soutenance.

Je voudrais aussi dire merci au directeur du laboratoire de recherche Modal X, Nathanaël Enriquez, qui a été le premier à m'encourager d'entreprendre la procédure d'habilitation dès ma rentrée dans l'enseignement supérieur français. Le support moral et technique des membres du laboratoire de recherche Modal X m'a maintes fois aidé à surmonter les différents obstacles qui peuvent survenir au cours d'un projet d'habilitation. J'adresse mes sincères remerciements à notre directeur du département de Mathématiques et Informatique de Paris Ouest, Laurent Mesnager, et au responsable du master ISIFAR Patrice Bertail, pour le grand nombre de conseils pratiques, qui m'ont beaucoup simplifié mes débuts dans l'enseignement supérieur français.

Après près de vingt ans passés à étudier les mathématiques, j'ai le sentiment, que bon nombre de personnes, que j'ai rencontrées pendant les différentes étapes de mon parcours d'études ont contribué à ma réusite. Je n'oublierai pas ici le groupe de travail stimulant qu'a organisé Heinrich Hering à Göttingen, où les sujets pouvait varier entre la physique quantique, la géométrie différentielle et fractale, l'analyse fonctionnelle, les équations aux dérivées partielles et les probabilités. Je tiens aussi à remercier ici mon ancien directeur de thèse doctorale Manfred Denker, qui m'a laissé le libre choix sur les sujets de recherches de ma thèse et qui m'a été un conseiller de grande valeur lors de mes démarches pour obtenir des bourses nationales allemandes pour des séjours scientifiques aux Etats-Unis et à Taiwan. Aux Etats-Unis j'ai fréquenté l'Université de l'Indiana à Bloomington où j'ai beneficié de discussions scientifiques enrichissantes avec mon hôte Rabi Bhattacharya. A Taiwan j'ai fréquenté l'Academia Sinica à Taipei. Ce séjour de deux ans a été très fructeux scientifiquement grâce à mes deux hôtes Hwang Chii-Ruey et Sheu Shuenn-Jyi qui forment à deux un tandem de recherche formidable qui m'a beaucoup inspiré.

Cette liste de remerciements ne serait pas complète sans Herold Dehling, qui au cours des dix dernières années m'a appris l'art d'enseigner les probabilités et les statistiques à des étudiants de tous niveaux. Les nombreuses discussions sur les mathématiques que j'ai eues avec Herold m'ont beaucoup fait évoluer au niveau scientifique.

Finalement, je voudrais remercier mes amis mathématiciens Holger Knöpfel, Brice Camus, Michael Stolz, Tatsuhiko Saigo, Narn-Rueih Shieh et Omar El-Dakkak pour les nombreuses de conversations inspiratrices que nous avons eues ensemble.

4 Introduction

Voici donc une synthèse des recherches que j'ai faites au cours des dernières années. Dans cette introduction je vais essayer d'expliquer mes motivations générales qui ont mené aux différentes enquêtes qui seront détaillées dans les différentes sections qui composent ce texte. Comme le dit le titre de cette synthèse le fil continu qui peut être reconnu dans le cours de mes recherches est les processus stochastiques et leurs propriétés asymptotiques. Il y a différentes façons de décrire les propriétés asymptotiques d'un processus stochastique.

Une première méthode consiste à renormaliser le processus et à prouver un théorème de limite pour la suite de processus qu'on obtient de cette façon. Le processus qu'on voit en limite est dans beaucoup de situations un processus simplifié, qui partage cependant beaucoup de propriétés avec le processus d'origine sur de grandes échelles. Par exemple on va voir dans la première section que pour certaines diffusions avec coefficients périodiques les propriétés de transience et de récurrence sont intimement liées aux mêmes propriétés de certaines diffusions à coefficients constants. Ceci permet alors de simplifier considérablement l'approche pour déterminer ces propriétés en passant par le processus limite.

Les premières trois sections de cette synthèse sont consacrées aux différents résultats que j'ai prouvés pour des suites obtenues par renormalisation de différents processus stochastiques. La deuxième section contient des résultats sur certains processus de Markov, dont les lois de transition ont une certaine périodicité spatiale. Ceci permet de retrouver sur de grandes échelles des lois de transition homogènes qui sont en général associées à des processus stables. On y trouvera des théorèmes de limite pour des diffusions sur des sous-varietés périodiques et des diffusions avec sauts dont les coefficients sont périodiques. De plus pour certaines de ces diffusions avec sauts nous découvrirons des cas où la suite renormalisée converge en probabilité vers le processus qui est zéro tout le temps. Dans ces cas nous entreprendrons une analyse des grandes déviations de cette convergence. Contrairement au cas de diffusions continues nous quitterons dans ces cas le domaine des grandes déviations classiques, car les lois de transisions de ces diffusions auront des queues lourdes. Il sera alors nécessaire d'entreprendre une analyse des grandes déviations adaptées à ce fait. Dans la troisième section je décris les résultats que j'ai obtenus pour des processus qui sont générés par une procédure de maximisation d'une suite de variables aléatoires plus ou moins dépendantes. Nous entrerons alors dans le domaine de la théorie des extrêmes. Les processus limites qu'on obtient dans ce cas sont des processus d'extrêmes ou des mélanges de ces mêmes processus. Nous traiterons deux différents types de problèmes dans cette section. Dans un premier temps nous nous intéresserons aux extrêmes d'une suite indexée par une marche aléatoire. Cette façon particulière de créer une suite stationnaire nous permettera, dans certains cas, de quitter la classe des suites de dépendances faibles, tout en gardant suffisamment d'informations sur le processus, qui nous permettra de prouver quand même des théorèmes de convergence en loi. Nous analyserons ensuite une suite générée par une procédure itérative qui est basée sur une maximisation dans un environnement périodique. Pour cette suite particulière de variables aléatoires nous décrirons un théorème de convergence en loi, qui peut être interprété comme un théorème d'homogénisation dans le contexte de la théorie des extrêmes. Dans la quatrième section on trouvera un théorème de limite que j'ai prouvé avec mon collègue Tatsuhiko Saigo pour une marche aléatoire en environnement aléatoire avec scènerie aléatoire. La limite qu'on obtient dans ce cas est un processus autosimilaire.

Une autre façon de comprendre les propriétés asymptotiques d'un processus stochastique est de vérifier si le processus s'approche d'un équilibre quand le temps va vers l'infini. Un grand nombre de processus de Markov ont cette propriété et il est dans ce cas intéressant de déterminer la vitesse avec laquelle cette convergence a lieu. Dans mes propres travaux je me suis consacré à une classe très particulière de diffusions, qui apparaît très naturellement dans des problèmes de transport dans des fluides incompressibles. La cinquième section est consacrée à ce sujet. Je décrirai d'abord deux résultats que j'ai obtenus dans ma thèse de doctorat et qui préparent certains résultats que j'ai obtenus ensuite sur l'équation de la vorticité. Dans cette section je décrirai aussi les principaux résultats que j'ai obtenus avec Hwang C.-R., Sheu S.-J. et Pai H.-M. sur le comportement du trou spectral de certaines diffusions quand le drift est accéléré à l'infini.

Nous conclurons ce texte avec la sixième et la septième section où je décrirai deux sujets sur lesquels j'ai travaillé plus récemment. Ces sujets sont un peu à part des autres sujets, car ils ce sont ouverts à moi par la coopération étroite avec Herold Dehling et Thomas Kott d'un côté et avec M. Stolz d'un autre côté. La sixième concerne certains résultats sur l'estimation de drift de processus Ornstein Uhlenbeck généralisés qui peuvent être utilisés pour décrire le comportement d'un prix qui dépend d'influences saisonnières; comme par exemple le prix du pétrole. La septième concerne l'évaluation du risque qu'encourt un assureur quand il gère deux produits différents dont les pertes ne sont pas nécessairement indépendantes.

5 Homogénisation des processus de Markov:

Des équations aux dérivés partiels avec coefficients périodiques jouent un rôle très important dans un grand nombre de modèles en physique. Malheureusement il est souvent impossible d'obtenir une solution explicite pour ces équations. Dans certains cas, il est cependant possible d'associer à ces équations des équations à coefficients constants, dont les solutions sont connues explicitement. Il est alors possible de prouver que les solutions du problème de départ convergent envers les solutions du problème homogène après renormalisation. Dans le livre de Bensoussan, Lions et Papanicolaou sur l'analyse asymptotique des structures périodiques, la relation bien connue entre certains opérateurs elliptiques et certaines diffusions est utilisée pour prouver des théorèmes d'homogénisation avec des arguments stochastiques. Pour obtenir des résultats d'homogénisation ils prouvent des théorèmes de limite centrale pour des diffusions associées aux problèmes paraboliques d'origine. La clé de leur approche est la relation entre les équations paraboliques

$$\partial_t u(x,t) = \sum_{i,j,k}^{d} a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(x,t) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\partial_{x_i}u(x,t)$$

et l'équation différentielle stochastique

$$dZ_t = b(Z_t)dt + \sigma(Z_t)dB_t,$$

où $a_{ij} = 1/2\sum_k \sigma_{ik}\sigma_{jk}$. Si b et σ sont supposées d'être périodiques et suffisamment lisses, alors il existe une mesure invariante π pour le processus Z. Il est demontré dans Bensoussan, Lions et Papanicolaou (1978), et avec une différente méthode dans Bhattacharya (1985), que les processus rénormalisés

$$Z_t^{(n)} := \sqrt{n}^{-1}\left(Z_{nt} - Z_0 - nt\int_{[0,1]^d} bd\pi\right)$$

convergent en loi vers un processus de Wiener avec matrice de covariances donnée par

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \int_{[0,1]^d}\sum_{i,j}(\delta_{i\alpha} - \partial_{x_i}\psi_\alpha)a_{ij}(\delta_{j\beta} - \partial_{x_j}\psi_\beta)d\pi,$$

où ψ_β est une solution périodique de l'équation suivante

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\psi_\beta(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\partial_{x_i}\psi_\beta(x) = b_\beta(x) - \int_{[0,1]^d} b_\beta d\pi.$$

Il y a un grand nombre de publications qui sont consacrées à l'homogénisation d'équations aux dérivées partielles avec coefficients périodiques. Par exemple des problèmes avec une ellipticité réduite ont été étudiés dans Hairer et Pavliotis (2004) et Hairer et Pardoux (2008). Dans mes propres travaux j'ai démontré des résultats d'homgenisation dans d'autres situations; notament sur des sous-variétés différentielles périodiques et pour diverses diffusions avec sauts dont les coefficients sont périodiques. Nous fixons un sous-groupe discret Λ de $(\mathbb{R}^d, +)$. La projection canonique $pr_\Lambda : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d/\Lambda$ associe à tout élément x de $\mathbb{R}^d$ la classe d'équivalence dans $\mathbb{R}^d/\Lambda$ qui contient x. Pour un $l \in \Lambda$ nous définissons $t_l : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; x \mapsto x + l$. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est appelé périodique s'il satisfait $t_l E = E$ pour tous les $l \in \Lambda$. Soit maintenant E un ensemble périodique et F un ensemble. Une fonction $f : E \to F$ est appelée périodique si elle satisfait $f \circ t_l = f$ pour tout $l \in \Lambda$. Pour toutes les fonctions périodiques $f : E \to F$ il existe une fonction $f_\Lambda : E/\Lambda \to E$ unique de sorte que $f = f_\Lambda \circ pr_\Lambda$. Pour une mesure π sur E/Λ et une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ périodique intégrable par rapport à π nous définissons

$$\pi[f] := \int_{E/\Lambda} f_\Lambda d\pi.$$

J'ai étudié l'homogénisation de diffusions sur des sous-variétés différentielles périodiques de $\mathbb{R}^d$. Nous supposons que M est une sous-variété différentielle périodique de $\mathbb{R}^d$ de sorte que M/Λ est compact. La sous-variété M hérite d'une métrique Riemanniene naturelle de l'espace environnant $\mathbb{R}^d$ à laquelle est associée une mesure de volume v_0. Soit A un opérateur différentiel elliptique périodique défini sur $C^2(M)$. L'opérateur A génère une diffusion X sur M. Le livre de Hsu (2001) peut être consulté pour plus de détails sur la théorie des diffusions sur les variétés différentielles. Pour toute fonction $g \in C^\infty(M)$ on a que

$$M_t^g := g(X_t) - g(X_0) - \int_0^t Ag(X_s)ds$$

est une martingale locale par rapport à un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$. Nous supposons que la filtration est complète et continue à droite. On définit un opérateur bilinéaire pour $h, g \in C^\infty(M)$ par

$$\Gamma(h, g) = A(hg) - hAg - gAh.$$

Le processus $X^\Lambda := pr_\Lambda(X)$ est aussi un processus de Markov sur l'espace quotient M/Λ qui est supposé être compact. Il est démontré dans Bensoussan, Lions et Papanicolaou (1978) qu'il existe dans ce cas une mesure de probabilité π invariante pour X^Λ sur M/Λ et deux constantes $C, \lambda > 0$ de sorte que pour toute fonction périodique $g \in L^\infty(M, v_0)$ avec $\pi[g] = 0$ on a

$$\|e^{tA}g\|_\infty \leq C\|g\|_\infty e^{-t\lambda}.$$

De plus il n'est pas difficile à voir que la restriction de l'opérateur L au sous-espace

$$L_p^2(M, \pi) := \Big\{ g : M \to \mathbb{R} \text{ périodique; } \pi[g^2] < \infty \Big\}$$

a un trou spectral. Il s'ensuit que la résolvante est définie en zéro sur le complément orthogonal des fonctions constantes dans $L_p^2(M, \pi)$. Ceci implique que pour tout $g \in L_p^2(M, \pi)$ avec $\pi[g] = 0$

l'équation $A\psi = g$ a une solution dans $\psi \in L^2_p(M,\pi)$ qui satisfait $\pi[\psi] = 0$. Les résultats de régularité elliptique impliquent que ψ est dans $C^\infty(M)$ si $g \in C^\infty(M)$. Pour $1 \leq \alpha \leq d$ la restriction des fonctions de coordonnées $k^\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}; x \mapsto x^\alpha$ à M est dénoté par κ^α. Le fait que $A\kappa^\alpha \in L^2_p(M,\pi) \cap C^\infty(M)$ implique que l'équation

$$A\psi^\alpha = A\kappa^\alpha - \pi\left[A\kappa^\alpha\right]$$

a une solution dans $L^2_p(M,\pi) \cap C^\infty(M)$. Soit $\overline{A\kappa}$ le vecteur dans $\mathbb{R}^d$ avec les composantes $\overline{A\kappa}^\alpha := \pi\left[L\kappa^\alpha\right]$ pour $1 \leq \alpha \leq d$. La variété M étant une sous-variété de $\mathbb{R}^d$, la diffusion X peut être interprétée comme une semi-martingale dans $\mathbb{R}^d$. Le processus X est alors une variable aléatoire avec valeurs dans l'espace des fonctions càdlàg $D_{\mathbb{R}^d}([0,\infty[)$ avec la topologie de Skorohod. Pour une matrice positivement semi-définie, symétrique Σ il existe un mouvement Brownien W^Σ sur $\mathbb{R}^d$ avec matrice de covariance Σ de sorte que $W^\Sigma_0 = 0$ presque sûrement.

Théorème 1 (Franke (voir Probab. Theor. Rel. Fields 2005))
La suite

$$X^{(n)}_t := n^{-1/2}(X_{nt} - X_0 - nt\overline{A\kappa})$$

converge vers W^Σ en loi par rapport à la topologie de Skorohod où

$$\Sigma_{\alpha\beta} := \int_{M/\Lambda} \Gamma(\kappa^\alpha - \psi^\alpha, \kappa^\beta - \psi^\beta) d\pi.$$

Si une sous-variété périodique M a une métrique Riemannienne g, on dira que la métrique Riemannienne est périodique si la restriction de t_l sur M est une isométrie par rapport à g. Dans le cas où X est du mouvement Brownien canonique sur une sous-variété de $\mathbb{R}^d$ avec métrique périodique j'ai démontré que

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{v(M/\Lambda)} \int_{M/\Lambda} g(\nabla(\kappa^\alpha - \psi^\alpha), \nabla(f^\beta - \psi^\beta)) dv,$$

où v est le volume Riemannien sur M/Λ, et ψ^α est la solution périodique de l'équation

$$\Delta\psi^\alpha = \Delta\kappa^\alpha$$

avec $\int_{M/\Lambda} \psi^\alpha dv = 0$.
Si de plus M est une sous-variété harmonique de $\mathbb{R}^d$ et X du mouvement Brownien canonique sur M on a

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{v(M/\Lambda)} \int_{M/\Lambda} g(\nabla\kappa^\alpha, \nabla f^\beta) dv.$$

J'ai appliqué le Théorème 1 pour étudier la récurrence et la transience de diffusions sur des sous-variétés périodiques.

Corollaire 1 (Franke (voir Probab. Theor. Rel. Fields 2005))
(1) Quand $\overline{A\kappa} \neq 0$ *la diffusion* X *est transiente sur* M.
(2) Supposons que $\overline{A\kappa} = 0$ *et que* Σ *est positivement définie. Alors la diffusion* X *est recurrente sur* M*, si, et seulement si* W^{Σ} *est récurrent sur* $\mathbb{R}^d$.

J'ai ensuite étudié le cas de diverses diffusions avec sauts dont les générateurs ont des coeffcients périodiques. Soit μ une mesure de Borel finie sur S^{d-1} et $\alpha \in]1,2[$. On peut utiliser des coordonnées sphériques $(\hat{y}, |y|) := (y/|y|, |y|) \in S^{d-1} \times \mathbb{R}^+$ pour définir une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ de façon suivante

$$\nu(dy) := \mu(d\hat{y})|y|^{-\alpha-1}d|y|.$$

La mesure ν est le compensateur d'un processus de Lévy α-stable L dans $\mathbb{R}^d$. Nous supposons que μ est symétrique, i.e.: $\mu(A) = \mu(-A)$ pour tous les ensembles mesurables $A \subset S^{d-1}$, et qu'il existe des constantes positives C_1, C_2 de sorte que

$$C_1 \leq \int_{S^{d-1}} |\langle v, \varphi\rangle|^{\alpha} \mu(d\varphi) \leq C_2.$$

La fonction caractéristique de L_t a la forme suivante

$$\varphi_{L_t}(\xi) := \mathbb{E}\left[e^{i\langle \xi, L_t\rangle}\right] = e^{t\psi(\xi)}$$

avec

$$\psi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d\backslash\{0\}} \left(e^{i\langle \xi, x\rangle} - 1 - i\langle \xi, x\rangle \mathbb{1}_{B_1(0)}(x)\right) \nu(dx).$$

Nous dénotons par $N^L(\omega, dy, dt)$ le processus de comptage de Poisson associé aux sauts $\Delta L_t := L_t - L_{t-}$ de L. Le processus L peut alors être décomposé de façon suivante

$$L_t(\omega) = \int_0^t \int_{B_1(0)^c} yN^L(\omega, dy, ds) + \int_0^t \int_{B_1(0)} y\tilde{N}^L(\omega, dy, ds),$$

où $\tilde{N}^L(\omega, dy, ds) := \left(N^L(\omega, dy, ds) - \nu(dy)ds\right)$ est la mesure aléatoire compensée. Nous appelons $\hat{N}^L(dy, ds) := \nu(dy)ds$ le compensateur de la mesure aléatoire $N^L(., dy, ds)$. Le fait que la mesure μ est symétrique implique qu'il n'y a pas de terme du type ct dans la décomposition de L.
J'ai étudié les solutions des équations différentielles stochastiques

$$\begin{aligned} &dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_{t-})dL_t, \\ &X_0 = x_0, \end{aligned}$$

où $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$ et $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sont périodiques et trois fois continuement différentiables. L'équation stochastique doit être interprétée comme une équation intégrale stochastique:

$$\begin{aligned} X_t &= x_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \int_{B_1(0)^c} \sigma(X_{s-})yN^L(.,dy,ds) \\ &\quad + \int_0^t \int_{B_1(0)} \sigma(X_{s-})y\tilde{N}^L(.,dy,ds). \end{aligned}$$

Les conditions imposées sur les fonctions b et σ impliquent l'existence et l'unicité des solutions dans la classe des $\mathcal{F}_t$-semi-martingales càdlàg. De plus le processus X est un processus de Markov. Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe associé à X sur l'espace des fonctions bornées continues $C_b(\mathbb{R}^d)$. Le générateur de $(T_t)_{t\geq 0}$ restraint à $C^2(\mathbb{R}^d) \cap C_b(\mathbb{R}^d)$ est l'opérateur suivant

$$\begin{aligned} Au(x) &= \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \left(u(x) - u(x+\sigma(x)y) - 1\!\!1_{B_1(0)}(y)\langle\sigma(x)y, \nabla u(x)\rangle\right) \nu(dy) \\ &\quad + \langle b(x), \nabla u(x)\rangle. \end{aligned}$$

Si on restraint l'opérateur A à $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ il peut être réinterpreté comme un opérateur pseudo-différentiel

$$Au(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} q(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$

dont le symbole est continu et négativement defini

$$q(x,\xi) = i\langle b(x),\xi\rangle + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \left(e^{-i\langle y,\xi\rangle} - 1 - i\langle y,\xi\rangle 1\!\!1_{B_1(0)}(y)\right) \nu(x,dy),$$

avec

$$\nu(x,A) := \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} 1\!\!1_A(\sigma(x)y)\nu(dy).$$

Kolokoltsov (2000) a démontré des théorèmes de régularité et des bornes de type Aronson pour les solutions fondamentales de l'équation pseudo-différentielle

$$\partial_t u(x,t) = \partial Au(x,t); \quad u(x,0) = f(x).$$

J'ai pu utiliser ces résultats de régularité pour démontrer qu'il existe sur $\mathbb{R}^d/\Lambda$ une mesure de probabilité π invariante pour le processus $X^\Lambda := pr_\Lambda(X)$ et que pour toute fonction périodique $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ qui satisfait $\pi[f] = 0$ il existe une fonction périodique ψ dans $C^2(\mathbb{R}^d)$ de sorte que

$$\pi[\psi] = 0 \quad \text{et} \quad A\psi = f.$$

L'existence de cette fonction ψ est un point crucial dans la démonstration du théorème suivant:

Théorème 2 (Franke (voir Journ. Theor. Prob. 2007))
La suite renormalisée

$$X^{(n)} := n^{-1/\alpha}\left(X_{nt} - nt\Pi(b) - x_0\right)$$

converge en loi par rapport à la topologie de Skorohod vers un processus de Lévy α*-stable* X^* *avec compensateur*

$$\bar{\nu}(A) = \left(\int_{\mathbb{R}^d/\Lambda} \nu \circ F_x^{-1}(A)\pi(dx)\right),$$

où pour $x \in \mathbb{R}^d/\Lambda$ *nous notons* $\nu \circ F_x^{-1}$ *la mesure image de* ν *par rapport à l'application linéaire*

$$F_x : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; y \mapsto \sigma_\Lambda(x)y.$$

La méthode que j'utilise pour prouver le Théorème 2 est basée sur les méthodes développées dans le livre de Jacod et Shiryaev (1987). Elle consiste à démontrer que les caractéristiques associées aux processus $X^{(n)}$ convergent de façon appropriées vers les caractéristiques de la limite X^*. Il se doit de dire que Tomisaki (1992) a obtenu un théorème semblable pour des processus L dont la mesure de Lévy est invariante aux rotations de $\mathbb{R}^d$ avec des méthodes différentes. Dans ce cas il est plus facile d'obtenir des résultats de régularité pour les densités de transition. Plus récemment Arisawa (2009) a prouvé des résultats pour certaines équations intégro-differentielles liées à des processus de Lévy.

J'ai aussi étudié le cas de processus à apparence stable avec coefficients périodiques. Soit maintenant $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^d)$ une fonction périodique de sorte que $0 < \alpha < 2$. Nous dénotons par $\mathcal{M}_s(S^{d-1})$ l'espace des mesures de Borel fini sur S^{d-1} qui satisfont $\mu(A) = \mu(-A)$ pour tous les ensembles $A \subset S^{d-1}$. Soit maintenant $\mu : \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_s(S^{d-1})$ une fonction périodique et continuement différentiable. De plus nous supposons qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $p \in S^{d-1}$ on a

$$C_1 \le \int_{S^{d-1}} |\langle p, \phi\rangle|^{\alpha(x)} \mu(x, d\phi) \le C_2.$$

Nous utilisons encore une fois des coordonnées polaires $(\hat{y}, |y|) := (y/|y|, |y|) \in S^{d-1} \times \mathbb{R}^+$ pour définir une famille de mesures $\eta(x, d\xi) = |\xi|^{-1-\alpha(x)} d|\xi| \mu(x, d\hat{\xi})$ sur $\mathbb{R}^+ \times S^{d-1} = \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$.
L'opérateur

$$Au(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \left(u(x+\xi) - u(x) - \frac{\langle \xi, \nabla u(x)\rangle}{1+|\xi|^2} 1\!\!1_{B_1(0)}(\xi)\right) \eta(x, d\xi)$$

génère un semi-groupe de Feller $(T_t)_{t \ge 0}$ sur l'espace $C_b(\mathbb{R}^d)$ auquel est associé un processus de Markov à trajectoire càdlàg X. En position x le processus X évolue comme un processus $\alpha(x)$-stable, ce qui explique l'origine du terme 'apparence stable'. Les densités de transition de ce processus de Markov sont les solutions fondamentales de l'équation $Au = \partial_t u$. Le processus X est appelé processus à apparence stable, car il se comporte localement comme un processus stable avec exponent de stabilité qui dépend de la position du processus dans l'espace.

Soit $N^X(\omega, dy, dt)$ le processus de comptage associé au processus de sauts $\Delta X_t := X_t - X_{t-}$. Le compensateur de $N^X(\omega, dy, dt)$ est $\hat{N}^X(\omega, dy, dt) := \eta(X_{t-}(\omega), dy)dt$. De plus le processus X peut être décomposé de façon suivante

$$\begin{aligned} X_t &= X_0(\omega) + \int_0^t \int_{B_1(0)^c} yN^X(., dy, ds) \\ &\quad + \int_0^t \int_{B_1(0)} y\tilde{N}^X(., dy, ds). \end{aligned}$$

avec $\tilde{N}^X(., dy, ds) := N^X(\omega, dy, ds) - \nu(\omega, dy, ds)$. Dans ce contexte aussi les résultats de Kolokoltsov peuvent être utilisés pour démontrer qu'il existe une mesure de probabilité invariante π pour $X^\Lambda := pr_\Lambda(X)$ et des constantes $C, \lambda > 0$ de sorte que pour toute fonction périodique $f \in C(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\pi[f] = 0 \text{ implique } \|T_t f\|_{\sup} \leq Ce^{-\lambda t}\|f\|_{\sup} \text{ pour tout } t \geq 0. \tag{1}$$

Pour $\alpha_o := \inf \alpha$ nous définissons une suite de processus rénormalisés

$$X_t^{(n)} := n^{-1/\alpha_o}(X_{nt} - X_0).$$

Le comportement de la suite $X^{(n)}$ dépend de la mesure de l'ensemble $\{x : \alpha_\Lambda(x) = \alpha_o\}$ par rapport à la mesure invariante π.

Théorème 3 (Franke (voir Bernoulli 2006))
Si $\pi(\alpha_\Lambda = \alpha_o) > 0$ les processus $X^{(n)}$ convergent en loi par rapport à la topologie de Skorokhod vers le processus de Lévy α_o-stable X^* qui est associé au compensateur

$$\nu_o(dy) := \int_{\mathbb{R}^d/\Lambda} \pi(dx)\mathbb{1}_{\{\alpha_\Lambda=\alpha_o\}}(x)\eta(x, dy).$$

Comme dans le cas des sous-variétés Riemanniennes périodiques il est possible d'appliquer ce résultat pour obtenir des informations sur la récurrence et la transience du processus X:

Corollaire 2 (Franke (voir Bernoulli 2006))
L'inégalité $\pi(\{\alpha_\Lambda = \alpha_o\}) > 0$ implique:
1) dans le cas $d = 1$ le processus X est transient si $\alpha_o < 1$ et récurrent si $\alpha_o \geq 1$;
2) dans le cas $d \geq 2$ alors X est transient.

La raison derrière Théorème 3 est le fait que les sauts effectués dans des zones où on a $\alpha > \alpha_0$ ne sont pas assez grands et pas assez courants pour survivre la renormalisation avec n^{-1/α_o}. Seulement les sauts effectués dans des endroits où $\alpha = \alpha_0$ sont des sauts d'un processus α_0-stable qui survivent la renormalisation avec le facteur n^{-1/α_o}. Il n'est donc pas mystérieux, qu'on retrouve un processus

α_0-stable à la limite.
Le cas le plus intéressant est le cas où $\pi(\alpha_\Lambda = \alpha_o) = 0$. Dans ce cas, le même raisonnement que ci-dessus démontre que la suite $X^{(n)}$ converge vers zéro en probabilité; ce qui n'est pas très instructif. Il est cependant possible d'analyser les déviations de cette convergence. On est dans une situation de queue lourde, où la théorie des grandes déviations a un aspect particulier qui est différent des grandes déviations de variables aléatoires dont la fonction génératrice des moments existe. La théorie des grandes déviations dans des situations de queues lourdes a été développée par Nagaev (1970) pour des suites de variables aléatoires et généralisée pour des processus de Markov avec incréments à queues lourdes par Godovan'chuk (1981). Une description de cette théorie peut être trouvée dans le dernier chapitre du livre de Wentzell (1990).
Nous allons supposer qu'il existe un $\mu \in \mathcal{M}_s(S^{d-1})$ de sorte que $\mu(x, d\hat{y}) = \mu(\hat{dy})$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. De plus nous supposons que la fonction de répartition $F_\alpha := \pi \circ \alpha_\Lambda^{-1}$ a une densité F'_α et qu'il existe un $\beta > 0$ de sorte que

$$\frac{F'_\alpha(tp + \alpha_o)}{F'_\alpha(t + \alpha_o)} \longrightarrow p^\beta \quad \text{quand } t \to 0.$$

La formule de co-surface de la théorie de la mesure géométrique et le fait que π a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue assure l'existence de F'_α dans notre situation. L'exponent β est en rapport avec la dimension de l'ensemble où α est égal à α_o.

Pour comprendre les grandes déviations de $X^{(n)}$ nous analysons d'abord le processus de Lévy Z qui est associé à la mesure de Lévy

$$\eta(dy) = \mu(d\hat{y}) \int_{\mathbb{R}^d/\Lambda} |y|^{-1-\alpha(x)} \pi(dx) d|y| = \mu(d\hat{y}) \int_{\alpha_o}^{2} |y|^{-1-q} F_\alpha(dq) d|y|,$$

où $F_\alpha = \pi \circ \alpha^{-1}$ est la mesure image de π par rapport à α. Il est possible de démontrer que la suite renormalisée

$$Z^{(n)} = n^{-1/\alpha_o}(Z_{nt} - Z_0)$$

satisfait les conditions (A), (B), (C) et (D) dans Wenzell (1990) (voir p.141). Ceci permet de comprendre les déviations de $Z^{(n)}$ des trajectoires qui performent seulement un nombre fini de sauts et sont constantes entre ces sauts.
Suivant la méthode décrite dans Wentzell (1990) nous définisons d'abord une famille de mesures Q^k dont le support est situé sur l'ensemble des trajectoires dans $D_0([0, T])$ qui exécutent exactement k sauts et qui sont constantes entre ces sauts. Ces trajectoires peuvent être paramétrisées par l'ensemble

$$E^k := \{(x_1, ..., x_k, t_1, ..., t_k); 0 < t_1 < ... < t_k \leq T, x_i \neq 0\}$$

en utilisant l'application

$$\Gamma_k : E^k \to D_0([0, T]); (t_1, x_1, ..., t_k, x_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[} + x_k \mathbb{1}_{[t_k, T]}.$$

Nous utilisons la mesure $\bar{\eta}(dx) := |x|^{-1-\alpha_o} d|x|\mu(d\hat{x})$ pour introduire sur E^k une mesure

$$R^k(dx_1, ..., dt_k) := \bar{\eta}(dx_1)\bar{\eta}(dx_2 - dx_1)...\bar{\eta}(dx_k - dx_{k-1})dt_1...dt_k.$$

La mesure image $Q^k := R^k \circ \Gamma_k^{-1}$ on $D_0([0,T])$ contient des informations sur les grands sauts des processus renormalisés $Z^{(n)}$. Dans ce qui suit nous allons dénoter la norme du suprémum de deux éléments γ_1 et γ_2 de $D_0([0,T])$ par $d_T(\gamma_1, \gamma_2)$. Pour un sous-ensemble mesurable U de $D_0([0,T])$ et pour un $\delta > 0$ nous définissons

$$U_{+\delta} := \{\gamma \in D_0([0,T]) : d_T(\gamma, U) < \delta\} \quad \text{et} \quad U_{-\delta} := \{\gamma \in D_0([0,T]) : d_T(\gamma, U^c) > \delta\}.$$

Le fait que la suite $Z^{(n)}$ satisfait les conditions A, B, C et D du livre de Wentzell (1990) implique que pour tout ensemble mesurable $U \subset D_0([0,T])$ qui satisfait $d_T(U, \Gamma_{k-1}(E^k)) > 0$ et $\lim_{\delta\downarrow 0} Q^k(U_{+\delta}\backslash U_{-\delta}) = 0$ on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ une formule asymptotique

$$\mathbb{P}(Z^{(n)} \in U) = (g(n))^k Q^k(U) + o((g(n))^k)$$

avec

$$g(n) := F'_\alpha(\alpha_o/\log n + \alpha_o)\frac{\alpha_o}{\log n}\Gamma(\beta + 1).$$

Cette formule évalue les vitesses à laquelle les processus renormalisés $Z^{(n)}$ quittent les partie de U où les trajectoires ont un certain nombre de sauts. Les parties de U où il y a au moins k sauts sont quittées avec une vitesse $(g(n))^k$. Il s'ensuit de ce résultat que les processus convergent en probabilité vers le processus qui est zéro presque sûrement.

Il est naturel de penser que les procesus $X^{(n)}$ ont le même comportement asymptotique que la suite $Z^{(n)}$, parce que les sauts effectués par X en équilibre par rapport à la mesure invariante π sont en moyenne les mêmes sauts que faits le processus Z. Malheureusement les processus $X^{(n)}$ ne satisfont pas les conditions A, B, C et D dans Wenzell (1990). Il a donc été nécessaire de modifier les preuves données dans le chapitre 6 de Wentzell (1990) en utilisant (1) à maints endroits. J'ai pu démontrer le théorème suivant:

Théorème 4 (Franke (voir Bernoulli 2006))
Pour tout ensemble mesurable $U \subset D_0([0,T])$ qui satisfait

$$d_T(U, \Gamma_{k-1}(E^k)) > 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{\delta\downarrow 0} Q^k(U_{+\delta}\backslash U_{-\delta}) = 0$$

on a

$$\mathbb{P}(X^{(n)} \in U) = (g(n))^k Q^k(U) + o((g(n))^k).$$

avec

$$g(n) := F'_\alpha(\alpha_o/\log n + \alpha_o)\frac{\alpha_o}{\log n}\Gamma(\beta + 1).$$

J'ai aussi prouvé des théorèmes de limite pour des processus de Lévy avec mesure de Lévy

$$\mu(A) := \int_{S^{d-1}} \int_0^\infty \mathbb{1}_A(|y|, \Phi_{|y|}\hat{y})|y|^{-1-\alpha(\hat{y})} d|y|\nu(d\hat{y})$$

où $(\Phi_t)_{t\geq 0}$ est un système dynamique avec un attracteur sur S^{d-1} et ν est une mesure finie sur S^{d-1}. Dans ce contexte on a un phénomène semblable à celui rencontré dans le cas des diffusions à apparence stable. Si $\nu(\alpha = \alpha_o) > 0$ j'ai démontré un théorème de limite vers une loi stable alors que dans le cas $\nu(\alpha = \alpha_o) = 0$ j'ai prouvé un théorème de grandes déviations semblable au Théorème 4 (voir J. Appl. Prob. (2007)).

Finalement j'ai étudié un processus en $\mathbb{R}^2$ dont les sauts suivent les flots de différents systèmes dynamiques dont les champs de vecteurs sont périodiques. J'ai démontré un théorème de limite vers une loi stable dans ce cas (voir Stoch. Proces. Appl. (2010)).

Je veux, dans un proche avenir, étudier le cas où seulement une partie des variables sont périodiques.

6 Théorie des valeurs extrêmes de suites aléatoires

La théorie des valeurs extrêmes a été dévelopée pour des suites indépendantes à partir des années quarante du siècle précédent. Dans ce cas les limites possibles sont connues explicitement et leurs domaines d'attraction peuvent être décrits avec le concept de la variation régulaire (voir Gnedenko (1943), de Haan (1970)). Autour des années soixante-dix certains de ces résultats ont été généralisés pour des suites stationnaires sous condition de dépendances faibles (voir Leadbetter (1974)). Ces résultats sont basés sur des conditions qui garantissent une indépendance asymptotique des grandes observations de la suite stationnaire, notament les conditions $D(u_n)$, $D'(u_n)$ et l'index extrémal (voir Leadbetter et al. (1983)). Un nombre considérable d'auteurs a construit des exemples plus ou moins naturels pour déterminer les relations entre les conditions de Leadbetter et l'index extrêmal (voir Chernick (1981), Denzel et O'Brian (1975), O'Brian (1974)).

Dans mes travaux avec T. Saigo nous avons découvert des exemples de suites stationnaires qui ne satisfont pas ces conditions (voir Adv. Appl. Prob. (2009), Stat. Prob. Lett. (2009)). Néanmoins nous pouvons démontrer que les lois de ces suites convergent après une normalisation appropriée.

Soit $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires centrées, indépendantes de même loi à valeurs entières de sorte que

$$S^{(n)}(t) := n^{-1/\alpha} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k \tag{2}$$

converge en loi vers un processus de Lévy α-stable $\{Y(t), t \geq 0\}$ par rapport à la topologie de Skorohod (voir Kesten et Spitzer (1979)).

Soit $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi qui est indépendante par rapport à la suite $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$. La suite de variables aléatoires $\{\xi(S_n), n \in \mathbb{N}\}$ est appelée une suite indexée par une marche aléatoire dans la littérature. Il s'agit d'une suite stationnaire avec des dépendances de longue portée non-triviales.

Dans les travaux avec T. Saigo nous avons étudié le comportement de la suite de variables aléatoires

$$M_n := \max\{\xi(S_1), \xi(S_2), ..., \xi(S_n)\}.$$

Nous supposons que la fonction de répartition F des variables aléatoires $\{\xi(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est dans le domaine d'attraction d'une loi extrême $G(x)$. Ce qui veut dire qu'il existe deux suites $\{a_n > 0, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ de sorte que pour

$$\tilde{M}_n := \max\{\xi(1), ..., \xi(n)\}$$

on a

$$\mathbb{P}\left((\tilde{M}_n - b_n)/a_n \leq x\right) = (F(a_n x + b_n))^n \longrightarrow G(x) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Il y a trois types de lois G qui émergent de cette situation: la loi de Fréchet, la loi de Weibull et la loi de Gumbel. Les domaines d'attraction qui correspondent à ces lois peuvent être trouvés dans l'ouvrage de Resnick (1987). La fonction de répartition G est associée à un processus qui est défini par ses lois fini-dimensionnelles

$$G_{t_1,\dots,t_k}(x_1,\dots,x_k) := G^{t_1}\left(\bigwedge_{i=1}^{k} x_i\right) G^{t_2-t_1}\left(\bigwedge_{i=2}^{k} x_i\right) \cdot \dots \cdot G^{t_k-t_{k-1}}(x_k).$$

Il en résulte un processus de Markov $\{\tilde{Z}(t), t > 0\}$ avec des trajectoires croissantes dans $D(0,\infty)$. Le processus $\tilde{Z}$ est appelé processus d'extrêmes associé à G dans la littérature. Il a été prouvé par Lamperti que la suite

$$\tilde{Z}^{(n)}(t) := \Big(\max\{\xi(1),\dots,\xi([nt])\} - b_n\Big)\Big/ a_n.$$

converge en loi vers le processus $\tilde{Z}$ par rapport à la topologie de Skorohod (voir Lamperti (1964)).

La différence entre la suite aléatoire $\tilde{M}_n$ et la suite aléatoire M_n vient du fait que la marche aléatoire $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ visite certains sites plusieurs fois. Il est donc évident que la loi des variables aléatoires M_n dépend du nombre de sites $R_n := \text{card}\{S_1,\dots,S_n\}$ que la marche aléatoire S a visités jusqu'au temps n. Les propriétés asymptotiques de la suite aléatoire $\{R_n; n \in \mathbb{N}\}$ ont été étudiées par Le Gall et Rosen (1991). Ils ont prouvé les trois résultats suivants:

R1. Si $\alpha < 1$ on a

$$\frac{1}{n} R_{[nt]} \longrightarrow qt \quad \text{presque sûrement quand } n \to \infty, \text{ avec } q := \mathbb{P}(S_k \neq 0; k \in \mathbb{N}).$$

R2. Si $\alpha = 1$ on a que

$$\frac{h(n)}{n} R_{[nt]} \longrightarrow t \quad \text{dans } L^p(\Omega, \mathbb{P}) \text{ quand } n \to \infty,$$

où

$$h(n) := 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0) \quad \text{est la fonction Green tronquée.}$$

R3. Si $1 < \alpha \leq 2$ on a pour tout $L \in \mathbb{N}$ et pour tout $t_1 < t_2 < \dots < t_L$ que

$$n^{-1/\alpha}(R_{[nt_1]},\dots,R_{[nt_L]}) \longrightarrow (\ell(Y(0,t_1)),\dots,\ell(Y(0,t_L))) \text{ en loi quand } n \to \infty,$$

où ℓ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Nous avons étudié le comportement de la suite des processus

$$Z^{(n)}(t) := \left(\max\left\{\xi(S_1),\dots,\xi(S_{[nt]})\right\} - b_{m(n)}\right)\Big/ a_{m(n)}$$

où $\{m(n); n \in \mathbb{N}\}$ est une suite croissante de nombres naturels appropriée. Nous avons prouvé le théorème suivant.

Théorème 5 (Franke, Saigo (voir Adv. Appl. Probab. 2009))
Si $\alpha \leq 1$ la suite $Z^{(n)}$ converge en loi vers le processus d'extrêmes $\tilde{Z}$ qui est associé à la loi extrême G, avec

$$m(n) := \begin{cases} [qn] & \textit{pour } \alpha < 1 \\ [n/h(n)] & \textit{pour } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Pour $\alpha > 1$ et $m(n) := \left[n^{1/\alpha}\right]$ la suite $Z^{(n)}$ converge en loi vers le processus stochastique

$$Z_Y(t) := Z(\ell(Y(0,t))),\ t \geq 0.$$

Dans le cas $\alpha > 1$ les lois limites qui émergent du précédent théorème sont des mélanges de lois de valeurs extrêmes classiques. La preuve de ce théorème est basée sur la convergence en loi de certains processus de comptages

$$N^{(n)} := \sum_k \delta_{(\tau_k/n,(\xi(S_{\tau_k})-b_{m(n)})/a_{m(n)})}$$

où

$$\tau_k := \inf\{n \in \mathbb{N}; R_n = k\}.$$

Nous avons en général trois cas à considérer:
i) si G est une loi de Fréchet nous devons utiliser l'intervalle compactifié à droite $E := (0,\infty]$ et la mesure $\nu(x,\infty] := x^{-\gamma}$;
ii) si G est une loi Weibull nous utilisons $E := (-\infty, 0]$ et la mesure $\nu(x,0] := (-x)^{-\gamma}$;
iii) si G est une loi Gumbel nous allons utiliser l'intervalle compactifié à droite $E := (-\infty,\infty]$ et $\nu(x,\infty] := e^{-x}$ (voir Resnick (1987) p.210).

Théorème 6 (Franke, Saigo (voir Adv. Appl. Probab. 2009))
Pour $\alpha \leq 1$ les processus de comptages $N^{(n)}$ convergent en loi vers un processus de Poisson N avec mesure d'intensité $\ell \times \nu$ où ℓ est la mesure de Lebesgue et

$$m(n) := \begin{cases} [qn] & for\ \alpha < 1 \\ [n/h(n)] & for\ \alpha = 1 \end{cases}.$$

Pour $\alpha > 1$ et $m(n) := \left[n^{1/\alpha}\right]$ les procesus de comptages $N^{(n)}$ convergent en loi vers un processus de Cox N_Y avec mesure d'intensité aléatoire

$$\mu(dt,dx) = \ell_Y(dt) \times \nu(dx),$$

où $\ell_Y(t) := \ell(Y(0,t))$ est une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}^+$.

Le fait que dans le cas de $\alpha \leq 1$ les limites de $Z^{(n)}$ et de $\tilde{Z}^{(n)}$ coincident, après un changement de vitesse des constantes normatrices, s'explique en observant l'index extrêmal de la suite $\{\xi(S_n); n \in \mathbb{N}\}$. L'index extrêmal est une mesure de dépendance dans les queues d'une suite de variables aléatoires stationnaire. Il est défini de façon suivante:
Une valeur $\theta \in [0,1]$ est appelée index extrêmal d'une suite de variables aléatoires stationnaires $\{\Xi_i, i \in \mathbb{N}\}$ si pour tout $\tau > 0$
(i) il existe une suite $v_n \uparrow \infty$ de sorte que $n(1 - F(v_n)) \to \tau$,
(ii) $\mathbb{P}(\max\{\Xi_1, ..., \Xi_n\} \leq v_n) \to e^{-\tau\theta}$.

Nous pouvons démontrer que l'index extrêmal de la suite $\{\xi(S_n), n \in \mathbb{N}\}$ est égal à la probabilité de non-récurrence $q = \mathbb{P}(S_k \neq 0, k \in \mathbb{N})$. Il est connu que, quand l'index extrêmal est plus grand que zéro, la suite stationnaire se comporte comme la suite indépendante avec les mêmes lois marginales après un changement d'échelle approprié; ce qui explique notre résultat dans le cas $\alpha < 1$.
Une autre façon d'analyser les extrêmes d'une suite aléatoire stationnaire est d'introduire une mesure de dépendance qui est adaptée au fait que ce sont les queues des lois multivariées du processus qui déterminent les propriétés asymptotiques des extrêmes. Cette approche a été choisie par Leadbetter en introduisant les conditions $D(u_n)$ et $D'(u_n)$ que nous introduisons ci-dessous.
Pour une suite de variables aléatoires stationnaire $\{\Xi_i, i \in \mathbb{N}\}$ nous dénotons la fonction de répartition multivariée

$$F_{i_1,...,i_n}(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = \mathbb{P}(\Xi_{i_1} \leq x_{i_1}, ..., \Xi_{i_n} \leq x_{i_n}) \ ; \quad 1 \leq i_1 < ... < i_n.$$

Soit $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite croissante de nombres réels.
Une suite stationnaire de variables aléatoires $\{\Xi_i, i \in \mathbb{N}\}$ satisfait la condition $D(u_n)$ s'il existe une famille $\{\alpha_{n,l}; n, l \in \mathbb{N}\}$, qui satisfait pour tous les choix de nombres entiers $1 \leq i_1 < ... < i_p < j_1 < ... < j_q \leq n$ avec $j_1 - i_p \geq l$

$$\Big| F_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q}(u_n, ..., u_n) - F_{i_1,...,i_p}(u_n, ..., u_n) F_{j_1,...,j_q}(u_n, ..., u_n) \Big| \leq \alpha_{n,l},$$

de sorte que $\alpha_{n,l_n} \to 0$ quand $n \to \infty$ pour toute suite $l_n = o(n)$.

Il a été prouvé par Leadbetter, que si la condition $D(u_n)$ est satisfaite les lois limites de la suite stationnaire coincident avec les lois limites de la suite indépendante avec les mêmes lois marginales après un éventuel changement d'échelle. Le changement d'échelle n'est pas nécessaire si la condition $D'(u_n)$ est satisfaite.
Une suite stationnaire de variables aléatoires $\{\Xi_i, i \in \mathbb{N}\}$ satisfait la condition $D'(u_n)$ si

$$\limsup_{n \to \infty} \ n \sum_{j=2}^{[n/k]} \mathbb{P}(\Xi_1 > u_n, \Xi_j > u_n) \longrightarrow 0 \quad quand \quad k \to \infty.$$

Ensemble les conditions $D'(u_n)$ et $D(u_n)$ assurent que

$$\mathbb{P}(\max\{\Xi_1, ..., \Xi_n\} \leq u_n) - \mathbb{P}(\max\{\tilde{\Xi}_1, ..., \tilde{\Xi}_n\} \leq u_n) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

où $\{\tilde{\Xi}_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une suite indépendante de variables aléatoires avec les mêmes lois marginales que $\{\Xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ (voir Leadbetter et al. (1983) p.61). Nous avons pu démontrer la proposition suivante:

Proposition 1 (Franke, Saigo (voir Adv. Appl. Probab. 2009))
Pour $\alpha \leq 1$ la suite $\{\xi(S_n), n \in \mathbb{N}\}$ satisfait la condition $D(u_n)$ avec

$$u_n := \begin{cases} a_{[qn]}x + b_{[qn]} & \text{pour } \alpha < 1 \\ a_{[n/h(n)]}x + b_{[n/h(n)]} & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Pour $\alpha < 1$ la suite $\{\xi(S_n), n \in \mathbb{N}\}$ ne satisfait pas la condition $D'(u_n)$ avec $u_n = a_{[qn]}x + b_{[qn]}$.

De plus nous avons démontré que pour $\alpha > 1$ la suite $\{\xi(S_n), n \in \mathbb{N}\}$ ne satisfait pas la condition $D(u_n)$ avec $u_n = a_{[n^{1/\alpha}]}x + b_{[n^{1/\alpha}]}$. Ceci avec la proposition explique que quand $\alpha \leq 1$ nous obtenons les mêmes lois limites que dans la situation indépendante après un changement de renormalisation.
Quand $\alpha > 1$ nos résultats sont des théorèmes de convergence qui ne font pas partie des classes étudiées dans la littérature. Dans ce cas les lois limites sont des lois nouvelles qui sont des mélanges des lois classiques (Gumbel, Fréchet ou Weibull).
Nous avons ensuite étudié dans une autre publication (Stat. Probab. Lett. (2009)) un cas similaire où la marche aléatoire S_n a été substituée par une certaine marche aléatoire en environnement aléatoire $\{X_t; t \geq 0\}$ sur $\mathbb{Z}$. Cette marche aléatoire est un processus de naissance et mort qui a été introduit par Kawazu et Kesten (1984) et qui sera décrit dans la section suivante pour d'autres fins. Dans ces travaux nous avons prouvé que les processus

$$\hat{Z}_t^{(n)} := \Big(\max\{\xi(X_s); s \leq nt\} - b_{m(n)}\Big)\Big/ a_{m(n)}$$

convergent en loi par rapport à la topologie de Skorohod vers un processus, qui est un mélange de processus d'extrêmes.
La preuve que nous avons donnée pour ce résultat est différente de la preuve du Théorème 5 qui est basée sur un théorème limite pour des processus de comptage. Nous utilisons une preuve directe qui consiste à prouver que les lois fini-dimensionnelles convergent et que la suite des processus est serrée dans $D([0, \infty))$.

Dans un autre manuscrit j'ai étudié les extrêmes de certaines suites aléatoires récursives avec paramètre d'intensité périodique (voir Extremes (2010)). Il s'agit dans ce cas d'un processus itératif basé sur une suite indépendante de variables aléatoires de même loi exponentielle $\{Y_k; k \in \mathbb{N}\}$. On définit la suite récursive $M_0 := x_0$ et

$$M_{n+1} := \max\{M_n, \lambda(M_n)Y_n\}$$

où λ est une fonction positive périodique. Ces exemples peuvent servir de modèle approximatif d'une particule qui se propage dans un filtre composé de différentes couches de matériaux filtrants qui sont arrangés de façon périodique.
Nous utilisons la suite $\{M_n; n \in \mathbb{N}\}$ pour définir une suite de processus croissants

$$\check{Z}_t^{(n)} := \frac{1}{a_n}\Big(Z_{[nt]} - \log n\Big).$$

Théorème 7 (Franke (voir Extremes 2010))
Les processus $\{\check{Z}^{(n)}; n \in \mathbb{N}\}$ convergent en loi par rapport à la topologie de Skorohod vers le processus d'extrêmes qui est associé à la loi Gumbel

$$G(x) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right).$$

Ce résultat est une déclaration sur les valeures extrêmes d'un processus non-stationaire qui dépend d'une structure de Markov. Les valeurs extrêmes de processus relié d'une façon différente à un processus de Markov ont été prouvé par Denzel et O'Brian (1975), Turkman et Olivera (1992), Turkman et Walker (1983) et O'Brian (1974). Hooghiemstra et Keane (1985) ont étudié les valeurs extrêmes, qui apparaissent pour certain modèles basé sur des iterations différentes de celles discuté dans Théorème 7. Nous notons aussi que des théorèmes sur les valeures extrêmes dans une contexte périodique ont été présenté par An et al. (1983), Davies et Mikosch (1999) et Mikosch et al. (2000).
La preuve du Théorème 7 est basée sur le théorème suivant qui n'est pas facile à démontrer:

Théorème 8 (Franke (voir Extremes 2010))
Pour toute fonction bornée $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ qui est continue à droite dans $\lambda_{\inf} := \operatorname{essinf}(\lambda)$ nous avons

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\lambda(Z_k)) \longrightarrow f(\lambda_{\inf}) \quad \textit{presque sûrement quand } n \to \infty.$$

L'idée derrière Théorème 8 est assez intuitive: nous observons d'abord que le processus Z_n est non-décroissant et que les intervalles où le processus est constant sont en moyenne de plus en plus longs quand le processus croît. Le temps moyen qui est nécessaire pour voir une valeur de la suite $\{Y_k; k \in \mathbb{N}\}$ de sorte que $\lambda(Z_n)Y_k$ soit assez grand pour surpasser la valeur actuelle Z_n dépend aussi de la valeur $\lambda(Z_n)$. Aux endroits où la valeur de λ est petite nous devons attendre en moyenne plus de temps. Il s'ensuit que le processus $\{Z_n; n \in \mathbb{N}\}$ passe une proportion de plus en plus grande de son temps à des endroits où la fonction λ est petite. Ceci implique que la somme Césaro converge vers $f(\lambda_{\inf})$. Mon objectif pour un futur proche est de prouver un théorème de convergence en loi pour la somme de la suite aléatoire $\{f(\lambda(Z_k); k \in \mathbb{N}\}$ et de réfléchir sur un éventuel théorème de grandes déviations. Il serait aussi intéressant d'élargir la classe des lois que peut avoir la suite indépendante de départ $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$. Il me semble que le Théorème 8 persiste dans le cas où ces lois ont des queues fines. Le cas de queues lourdes pourrait amener de nouveaux phénomènes.

7 Processus en scénerie aléatoire

La classification de processus autosimilaires est loin d'être terminée. A la fin des années soixante-dix du siècle précédent de nouvelles constructions permettant d'obtenir des processus autosimilaires ont été présentées par Kesten et Spitzer (1979). Leur construction est basée sur des marches aléatoires dans des scéneries aléatoires. Au début des années quatre-vingts du siècle précédent Kawazu et Kesten (1984) ont présenté une autre méthode basée sur des marches aléatoires dans des environnements aléatoires. Dans un travail récent avec T. Saigo nous unissons l'approche de Kesten et Spitzer avec celle de Kawazu et Kesten (voir Bernoulli 2010). Dans ce manuscrit nous prouvons un théorème limite pour certaines marches aléatoires avec environnement aléatoire dans des scéneries aléatoires.

Soit $\{\lambda_j; j \in \mathbb{Z}\}$ une famille de variables aléatoires positives de même loi et soit $\mathcal{A}$ la σ-algèbre générée par ses variables aléatoires. Soit $\{X(t); t \geq 0\}$ une marche aléatoire à temps continu en $\mathbb{Z}$ dont les lois de transition ont la propriété suivante quand $h \to 0$

$$\mathbb{P}(X(t+h) = j+1 | X(t) = j, \mathcal{A}) = \lambda_j h + o(h) \tag{3}$$
$$\mathbb{P}(X(t+h) = j-1 | X(t) = j, \mathcal{A}) = \lambda_{j-1} h + o(h) \tag{4}$$
$$\mathbb{P}(X(t+h) = j | X(t) = j, \mathcal{A}) = 1 - (\lambda_j + \lambda_{j-1})h + o(h). \tag{5}$$

De plus supposons que la variable aléatoire λ_1^{-1} est dans le domaine d'attraction normal d'une loi α-stable (einseitig) ϑ_α avec $\alpha \in (0,1)$. Il a été prouvé par Kawazu et Kesten que les processus

$$X_n(t) := \frac{1}{n} X(n^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} t)$$

convergent en loi vers un processus autosimilaire $\{X_*(\tau); \tau \geq 0\}$.

Soit $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$ une famillie de variables aléatoires indépendantes et de même loi, qui sont indépendantes du processus $\{X(t); t \geq 0\}$. Finalement supposons que la variable aléatoire $\xi(0)$ est dans le domaine d'attraction normal d'une loi β-stable ϑ_β avec $\beta \in (0,2]$. Le processus

$$\Xi(t) := \int_0^t \xi(X(s)) ds$$

généralise la marche aléatoire en scénerie aléatoire étudiées dans les travaux de Kesten et Spitzer qui est définie par

$$\Xi_{KS}^{(n)} := \sum_{i=1}^{n} \xi(S_i)$$

où $\{S_i; i \in \mathbb{N}\}$ est une marche aléatoire classique de sorte que les processus renormalisés $S^{(n)}(t) := n^{-\frac{1}{\alpha}} S_{[nt]}$ convergent en loi vers un processus de Lévy α-stable avec $\alpha \in (1,2]$. Kesten et Spitzer ont démontré que les processus

$$\Xi_{KS}^{(n)}(t) := n^{-1+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha\beta}} \sum_{i=1}^{[nt]} \xi(S_i)$$

convergent en loi par rapport à la topologie Skorohod vers un processus autosimilaire. Depuis un grand nombre d'auteurs ont etudié différentes généralisations de ce théorème. Notament Shieh (1995) où les processus de limite sont généralisés au cas multidimensionnel, Lang et Nguyen (1983) on traité le cas où la marche aléatoire est multidimensionnelle pour des scéneries particulières, Maejima (1996) où la scénerie aléatoire est dans le domaine d'attraction d'une loi opérateur stable, Arai (2001) où la scénerie aléatoire est dans le domaine d'attraction partielle d'une loi semi-stable et finalement Saigo et Takahashi (2005) où la scénerie aléatoire et la marche aléatoire appartiennent au domaine d'attraction partielle d'une loi semi-stable et d'une loi operateur semi-stables. Dans le cas où la marche aléatoire est le processus de naissance et de mort introduit en haut nous avons démontré le théorème suivant:

Théorème 9 (Franke, Saigo (voir Bernoulli 2010))
Pour $\kappa := \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ *et* $k_n := n^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}$ *les processus*

$$\Xi^{(n)}(t) := n^{-\kappa} \int_0^{k_n t} \xi(X(s))ds,$$

convergent en loi par rapport à la topologie de Skorohod vers la loi d'un processus autosimilaire $\{\Xi_*(t); t \geq 0\}$ *avec exponent* $\mu = 1 - \frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{(\alpha+1)\beta}$.

Le processus $\{\Xi_*(t); t \geq 0\}$ est défini de la façon suivante:
Soient Z_+ et Z_- deux copies indépendantes du processus de Lévy β-stable associé à la loi stable ϑ_β. De plus soit $\{L_*(\tau, x); \tau \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ le temps local du processus stochastique $\{X_*(\tau); \tau \geq 0\}$. L'existence du temps local est démontrée dans Franke et Saigo (2010); de plus nous avons prouvé que pour $\tau \geq 0$ fixe les processus

$$\{L_*(\tau, x-); x \geq 0\} \quad \text{et} \quad \{L_*(\tau, -(x-)); x \geq 0\}$$

sont prévisibles par rapport à la filtration canonique de Z_+ resp. Z_-. Le processus stochastique Ξ_* peut être représenté par l'intégrale stochastique

$$\Xi_*(\tau) := \int_0^\infty L_*(\tau, x-)dZ_+(x) + \int_0^\infty L_*(\tau, -(x-))dZ_-(x).$$

8 Diffusions en milieu incompressible

Une question qui est souvent posée en physique est l'influence du transport sur la diffusion d'une substance dans un liquide en mouvement. Dans cette situation le mouvement du liquide est superposé avec la motion aléatoire des particules de la substance. Bien qu'il existe des équations différentielles partielles qui décrivent l'évolution de la répartition de ces particules, on ne connaît, dans la majorité des cas, pas les solutions explicites de ces équations. Souvent l'équation elle-même n'est pas entièrement connue, car elle dépend du champ de vecteurs des vitesses du médium, qui lui est déterminé par des équations de la dynamique des fluides qui, en général, sont difficiles à résoudre. Dans cette situation, si le médium est incompressible, la seule information fiable à disposition est le fait que le champ de vecteurs est à divergence zéro. On est alors amené à étudier la classe entière des diffusions dont le terme de transport n'est pas déterminé. Cependant en applications il est souvent suffisant de connaître certaines caractéristiques du processus stochastique, comme par exemple la vitesse de convergence vers une éventuelle mesure invariante. On peut alors espérer de prouver dans ces cas des résultats qui ne dépendent pas du flot sousjacent. J'ai pu démontrer dans ma thèse de doctorat qu'il existe une borne inférieure pour la convergence de familles de diffusions envers la loi invariante sur des variétés compactes, qui ne dépend pas du champ de vecteurs.
Si b est un champ de vecteurs à divergence zéro sur une variété Riemannienne (M, g) l'opérateur

$$A_b f(x) := \Delta f(x) + b(x) \cdot \nabla f(x)$$

génère une diffusion $X^{(b)}$ qui décrit un mouvement Brownian dans un flot dont la vitesse locale à l'endroit x est le vecteur $b(x)$. Pour tous les champs de vecteurs à divergence zéro les diffusions $X^{(b)}$ ont toutes la même mesure invariante qui est le volume Riemannien de la variété M. Par la suite nous noterons pour une fonction intégrable f son intégrale par rapport à la mesure invariante $\pi(dx) = \frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\mathrm{vol}(dx)$ par

$$\pi[f] := \int f(x)\pi(dx).$$

Le théorème de Döblin assure l'existence de constantes $K, \lambda > 0$ de façon que

$$\left\| T_t^{(b)} f - \pi[f] \right\|_\infty \leq K e^{-\lambda t} \left\| f - \pi[f] \right\|_\infty.$$

Les constantes K et λ dépendent du champ de vecteurs d'une façon non triviale. Par exemple la constante λ est définie par $\lambda := \log\left(\frac{1}{1-\delta}\right)$ avec $\delta := \mathrm{vol}(M) \inf_{x,y} p_b(1, x, y)$ où $p_b(t, x, y)$ est la densité de transition de la diffusion $X^{(b)}$. Pour obtenir des bornes uniformes pour la convergence vers la mesure invariante il est donc nécessaire d'avoir des bornes uniformes pour les densités de transition des processus $X^{(b)}$. J'ai démontré le théorème suivant dans ma thèse de doctorat:

Théorème 10 (Franke (voir Math. Zeit. 2004))
Pour toute variété Riemannienne compacte (M,g) il existe une variété de comparaison (M^*,g^*) et deux points $x^*, y^* \in M^*$ de sorte que $t \geq 0$

$$\inf_{b;\mathrm{div} b=0}\ \inf_{x,y\in M} p_b(t,x,y) \geq p^*(t,x^*,y^*),$$

$$\sup_{b;\mathrm{div} b=0}\ \sup_{x,y\in M} p_b(t,x,y) \leq p^*(t,x^*,x^*),$$

où $p^*(t,x,y)$ est la densité de transition d'un mouvement Brownien sur M^*.

En d'autres mots: aucun flot préservant le volume ne peut ralentir le flot de la chaleur en dessous d'une certaine vitesse minimale, qui est déterminée par la structure isopérimétrique de la variété Riemanienne (voir Math. Z. (2004)). Ceci implique qu'il existe une borne inférieure pour la constante λ et une borne supérieure pour la constante K dans le résultat de Döblin ci-dessus. La vitesse de convergence vers la mesure invariante est donc uniforme. Des résultats de ce type sont importants dans l'homogénisation de l'équation

$$\Delta u(x,t) + b_n \nabla u(x,t) = \partial_t u(x,t), \quad u(x,0) = f(x),$$

avec

$$b_n(x) := b(x) + \beta(x/n)$$

où b et β sont des champs de vecteurs périodiques à divergence zéro. Pour prouver un théorème d'homogénisation dans cette situation on a besoin qu'il existe une vitesse uniforme de convergence vers la mesure invariante qui ne dépend pas de $n \in \mathbb{N}$ (voir Bhattacharya et Götze (1995), (1996)).
La construction de (M^*,g^*) dans Théorème 10 est basée sur le profil isopérimétrique de la variété M

$$\mathcal{I}(c) = \inf_{U;\mathrm{vol}_M(U)=c} \mathrm{vol}_{\partial U}(\partial U).$$

La variété M^* est une sphère $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ avec pôle nord x^* et pôle sud y^* avec une nouvelle métrique g^* de sorte que M^* satisfait les propriétés suivantes:
i) la métrique g^* est invariante par rapport aux rotations dans $\mathbb{R}^{d+1}$ qui fixent l'axe qui passe par le pole nord x^* et le pole sud y^* de S^d;
ii) la métrique g^* est invariante par rapport à la réflection par rapport au plan qui contient zéro et qui est orthogonal à l'axe qui passe par le pôle nord x^* et le pôle sud x^* de S^d
iii) on a pour tout $c > 0$ que $\mathcal{I}(c) \geq \mathrm{vol}_{\partial\hat{U}_c}(\partial\hat{U}_c)$, où $\hat{U}_c$ dénote la boule autour de x^* par rapport à la métrique g^* avec $\mathrm{vol}^*(\hat{U}_c) = c$;
iv) on a $\mathrm{vol}^*(M^*) = \mathrm{vol}(M)$.
Il est démontré dans Bérard (1986) que des variétés de comparaison existent. Ces méthodes ont été

utilisées dans Bérard et Meyer (1982) et dans Gallot (1988) pour démontrer des inégalités isopérimétriques sur des variétés Riemanniennes. Ces mêmes méthodes sont utilisées pour obtenir des constantes de Sobolev optimales, qui sont nécessaires dans l'analyse de certaines équations différentielles non-linéaires d'origine géométrique (voir Aubin (1998)).
La chaleur qui quitte un ensemble A doit passer par son bord ∂A. La fonction isopérimétrique $\mathcal{J}$ détermine donc la vitesse avec laquelle la chaleur se répand sur la variété M. La propriété (iii) garantit que la chaleur quitte les calottes polaires de volume c sur M^* plus lentement que n'importe quel ensemble de volume c sur M. Cette propriété est en quelque sorte robuste par rapport à une perturbation du flot de la chaleur par un flot incompressible.
De plus pour une fonction $f \in L^1(M, \mathrm{vol})$ il existe une fonction $\tilde{f} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ décroissante de sorte que la fonction $\hat{f}(x) := \tilde{f}(d^*(x^*, x))$ satisfait $\mathrm{vol}(f \geq a) = \mathrm{vol}^*(\hat{f} \geq a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. On appelle $\hat{f}$ le réarrangement symétrique de f sur M^*. La méthode de réarrangement a été introduite en analyse par Faber (1923) et Krahn (1926) pour résoudre la conjecture de Rayleigh qui consiste à dire que parmi les surfaces de même superficie la surface circulaire a la plus petite première valeur propre du Laplacien avec bord de Dirichlet.
J'ai prouvé le théorème suivant dans ma thèse. Il peut être utilisé pour prouver le théorème précédent:

Théorème 11 (Franke (voir Math. Zeit. 2004))
On a pour tout $c, t \geq 0$ et toute fonction $f \in L^1(M, \mathrm{vol})$ que

$$\sup_{\mathrm{div}(b)=0} \sup_{\mathrm{vol}(U)=c} \int_U T_t^{(b)} f d\mathrm{vol} \leq \int_{U_c} T_t^* \hat{f} d\mathrm{vol}^*,$$

où T^* dénote le semi-groupe généré par le mouvement Brownien canonique sur M^*.

J'ai ensuite appliqué les mêmes méthodes de réarrangement pour étudier le cas de diffusions plus générales avec bord Dirichlet (voir Math. Nach. (2007)) et la décroissance de la vorticité dans un fluide en dimension deux (voir Semigroup Forum (2004)).

L'équation de la vorticité en dimension deux est l'équation suivante

$$\Delta\omega(x,t) - u(x,t) \cdot \nabla\omega(x,t), \quad \omega(x,0) = \omega_0(x)$$

où $u(x,t)$ est le champs de vitesses du medium en mouvement. La particularité de cette équation est que le champs de vecteurs $u(x,t)$ et la vorticité sont solidement liés par la relation $\mathrm{rot}u(x,t) = \omega(x,t)$. La loi de Biot Savat donne une expression pour u en terme de ω:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_2 - y_2}{|x-y|^2} \omega(y,t) dy \\ u_2(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \omega(y,t) dy. \end{aligned}$$

L'équation de vorticité est en effet une équation non-linéaire, mais le champs de vecteur $u(x,t)$ a quand même divergence zéro. J'ai pu appliquer les méthodes développées dans ma thèse de doctorat pour prouver le théorème suivant:

Théorème 12 (Franke (voir Semigroup Forum 2004))
On a pour tout $c, t \geq 0$ et pour toute condition initiale $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2, \lambda)$

$$\sup_{\ell(U)=c} \int_U \omega(x,t)dx \leq \int_{U_c} T_t \hat{\omega}_0^+(x)dx$$

et

$$\inf_{\ell(U)=c} \int_U \omega(x,t)dx \geq -\int_{U_c} T_t \hat{\omega}_0^-(x)dx,$$

où $(T_t)_{t\geq 0}$ est le semi-groupe généré par l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^2$, ℓ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, U_c est la boule de volume c autour de zéro et $\hat{\omega}_0^+$, $\hat{\omega}_0^-$ sont les réarrangements symétriques de ω_0^+ resp. ω_0^-.

On obtient, à partir de ces inégalités en appliquant la loi de Biot Savat, le résultat suivant qui donne des bornes pour la dissipation de l'énergie cinétique dans le flot:

Corollaire 3 (Franke (voir Semigroupe Forum 2004))
On a pour tout $c, t \geq 0$ et $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2, \lambda)$ que

$$\sup_{\ell(U)=c} \int_U |u(x,t)|^2 dx \leq \Omega_t \int_{U_c} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|x-y|^2} \Big(T_t \hat{\omega}_0^+ + T_t \hat{\omega}_0^-\Big) dy dx$$

avec

$$\Omega_t := \int_{\mathbb{R}^2} |\omega(x,t)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} T_t \hat{\omega}_0^+ dx + \int_{\mathbb{R}^2} T_t \hat{\omega}_0^- dx.$$

Du mois de mars 2006 au mois de février 2008 j'ai été invité à l'Accademia Sinica à Taipei pour travailler avec le groupe de recherche de C.-R. Hwang et S.-J. Sheu. Dans ma coopération avec le groupe de l'Academia Sinica nous avons étudié la famille des diffusions $X^{(c)}$ générée sur une variété Riemannienne compacte (M, g) par la famille d'opérateurs différentiels

$$A_c f(x) := \Delta f(x) + cb(x) \cdot \nabla f(x); \; c \in \mathbb{R}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace, b est un champ de vecteurs à divergence zéro. Les semi-groupes $T^{(c)}$ associés aux diffusions $X^{(c)}$ convergent vers la mesure invariante π avec une vitesse exponentielle; i.e.:

$$\Big\| T^{(c)} f - \pi[f] \Big\|_2 \leq K_c e^{-\rho(c)t} \Big\| f - \pi[f] \Big\|_2,$$

où

$$\rho(c) := -\sup\Big\{\mathrm{Re}[z]; z \in \mathrm{Spec}(A_{cb})\backslash\{0\}\Big\}$$

est le trou spectral du générateur A_c.
Pour grands nombres d'applications il est important de connaître le comportement de $\rho(c)$ quand $|c|$ tend vers l'infini. Il est possible de déduire des travaux de Constantin et al. (2010) que le trou spectral $\rho(c)$ croît vers infini si et seulement si l'opérateur anti-symétrique $b \cdot \nabla$ n'a pas de fonctions propres dans

$$H^1 := \Big\{f \in L^2(M, \mathrm{vol}) : |\nabla f| \in L^2(M, \mathrm{vol}) \ \wedge \ \pi[f] = 0\Big\}.$$

Il se pose donc tout naturellement la question du comportement du trou spectral au moment où il existe des fonctions propres de $b \cdot \nabla$ dans H^1. Nous avons pu prouver le théorème suivant:

Théorème 13 (Franke, Hwang, Pai, Sheu (voir Transact. Amer. Math. Society 2010)) *On a*

$$\lim_{|c|\to\infty} \rho(c) = -\inf_{\mu\in\mathbb{R}} \inf \left\{ \int |\nabla\varphi|^2 d\mathrm{vol}; \|\varphi\|_2 = 1, \varphi \in H^1_\mu \right\}.$$

où

$$H^1_\mu := \left\{\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \in H^1 : b \cdot \nabla\varphi \overset{w}{=} i\mu\varphi\right\}.$$

Un théorème semblable a été prouvé par Berstyncki et al. (2005) pour la valeur principale d'un problème de Dirichlet sur une variété avec bord. Dans ce cas les opérateurs A_c opèrent sur l'espace H^1_0, qui est la fermeture par rapport à la norme H^1 de l'espace des fonctions lisses qui sont zéro sur le bord. La valeur principale est définie par $\rho_0(c) := -\sup\Big\{\mathrm{Re} z \in \mathrm{Spec}(A^0_{(cb)})\Big\}$. Berstycki et al. ont démontré que

$$\lim_{|c|\to\infty} \rho_0(c) = -\inf\left\{ \int |\nabla\varphi|^2 d\mathrm{vol}; \varphi \in H^1_0, \|\varphi\|_2 = 1, b \cdot \nabla\varphi \overset{w}{=} 0\right\}.$$

La difficulté dans cette situation vient du fait que les générateurs de ces diffusions ne sont pas auto-adjoints. Il n'est donc pas possible d'utiliser des techniques classiques comme le quotient de Rayleigh et il faut donc établir d'autres méthodes. Dans leurs démonstrations Berestycki et al. (2005) utilisent de façon essentielle les faits que la valeur principale est réelle et que la fonction propre qui y est associée prend des valeurs dans $\mathbb{R}$ et ne change pas de signe. Ces deux propriétés ne peuvent pas être utilisées dans notre cas où la valeur propre associée au trou spectral est un nombre complexe de même que la fonction propre qui y correspond prend des valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous ne pouvons donc pas utiliser les mêmes arguments que Berstycki et al. (2005) et devons analyser directement le comportement de certaines caracteristiques des résolvantes $R^{(c)}_\lambda$ des générateurs A_c quand $|c|$ tend vers l'infini. Nous avons trouvé le résultat suivant:

Théorème 14 (Franke, Hwang, Pai, Sheu (voir Transact. Amer. Math. Society 2010)) *Si* $H^1_\mu \neq \{0\}$ *alors il existe pour tout* $\epsilon > 0$ *un* $c_0 > 0$ *de sorte que pour tout* $c \in \mathbb{R}$ *qui satisfait* $|c| > c_0$ *on a un* $z \in B_\epsilon(\rho_\mu + ic\mu)$ *avec* $z \in \mathrm{Spec}(A_c)$*, où*

$$\rho_\mu := \inf\left\{\int \varphi^2 d\mathrm{vol};\ \|\varphi\|_2 = 1, \varphi \in H^1_\mu\right\}.$$

Ce résultat est à la base du Théorème 13. Dans un autre manuscrit avec S.-J. Sheu nous examinons le comportement des résolvantes de la précédente famille de diffusions quand $|c|$ tend vers l'infini. Nous avons prouvé que les résolvantes convergent envers une pseudo-résolvante auto-adjointe. Dans le futur nous voulons essayer d'associer à ces pseudo-résolvantes des processus stochastiques sur un ensemble approprié et de prouver des théorèmes de convergence au niveau des processus.

9 Estimation de drift pour des diffusions autorégressive

Avec H. Dehling et T. Kott (Eon Ruhrgas) nous avons examiné l'estimation de paramètres de drift pour des modèles qui sont utilisés dans la prévison du prix du pétrole. Le prix du pétrole est un processus qui est sous l'effet de fortes influences saisonnières périodiques. Parmi les processus qui peuvent servir de modèle pour ces prix les processus d'Ornstein Uhlenbeck avec drift jouent un rôle particulier, qui résulte du fait qu'il existe des solutions explicites pour ces équations. L'équation différentielle qui définit le processus d'Ornstein Uhlenbeck avec drift est donnée par:

$$dX_t = (Q(t) - \alpha X_t)dt + \sigma dB_t, \quad t \geq 0, \tag{6}$$

où L est une fonction et α, σ sont des valeurs positives. La diffusion X au temps t a une forte tendance de se rapprocher du niveau $Q(t)$. Si la fonction Q est périodique il en sort une diffusion avec des caractéristiques d'autorégression autour du niveau $Q(t)$. Nous nous intéressons au cas particulier où la fonction Q peut être décomposée de façon suivante

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \varphi_i(t), \tag{7}$$

avec des fonctions connues $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_p(t)$ et où les paramètres $\mu_1, \ldots, \mu_p$ et α sont inconnus. Nous supposons que le paramètre σ est connu. Il existe en effet un grand nombre de publications sur l'estimation de volatilité, de plus l'estimation de σ peut être faite avec toutes les précisions dans un modèle à temps continu. En partant d'une approche du maximum de vraisemblance nous avons obtenu un estimateur $\hat{\theta}_{ML}^{(T)}$ pour le vecteur $\theta := (\mu_1, ..., \mu_p, \alpha)^t$ qui est basé sur l'observation d'une portion de la trajectoire jusqu'au temps T. Explicitement on a

$$\hat{\theta}_{ML}^{(T)} = Q_T^{-1} P_T.$$

avec

$$\begin{aligned} Q_T &:= \begin{pmatrix} G_T & -a_T \\ -a_T^t & b_T \end{pmatrix}, \\ P_T &:= \left(\int_0^T \varphi_1(t) dX_t, \ldots, \int_0^T \varphi_p(t) dX_t - \int_0^T X_t \, dX_t \right)^t \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} G_T &:= \left(\int_0^T \varphi_j(t) \varphi_k(t) dt \right)_{1 \leq j,k \leq p}, \\ a_T &:= \left(\int_0^T \varphi_1(t) X_t \, dt, \ldots, \int_0^T \varphi_p(t) X_t \, dt \right)^t, \\ b_T &:= \int_0^T X_t^2 dt. \end{aligned}$$

Nous avons pu démontrer le théorème suivant.

Théorème 15 (Dehling, Franke, Kott (voir Stat. Infer. Stoch. Proc. 2010))
Si les fonctions $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_p(t)$ sont périodiques avec période un et orthogonales dans $L^2([0,1], \ell)$ l'estimateur du maximum de vraisemblance est consistant, i.e.

$$\hat{\theta}_{ML}^{(T)} \to \theta \quad \textit{presque sûrement quand } T \to \infty.$$

Nous avons ensuite prouvé la normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{\theta}_T$:

Théorème 16 (Dehling, Franke, Kott (voir (Stat. Infer. Stoch. Proc. 2010)
Si les fonctions $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_p(t)$ sont périodiques avec période un et orthogonales dans $L^2([0,1], \ell)$ on a

$$\sqrt{T}\sigma^{-1}(\hat{\theta}_{ML}^{(T)} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, C), \quad \textit{quand } T \to \infty$$

avec

$$C = \begin{pmatrix} I_p + \gamma\Lambda\Lambda^t & -\gamma\Lambda \\ -\gamma\Lambda^t & \gamma \end{pmatrix}$$

où $\Lambda := (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p)^t$ et

$$\begin{aligned} \Lambda_i &:= \int_0^1 \varphi_i(t)\tilde{h}(t)dt, \quad i = 1, \ldots, p \\ \gamma &:= \left(\int_0^1 (\tilde{h}(t))^2 dt + \frac{\sigma^2}{2\alpha} - \sum_{i=1}^p \Lambda_i^2 \right)^{-1} \end{aligned}$$

La fonction $\tilde{h} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est défini par

$$\tilde{h}(t) \quad = \quad e^{-\alpha t} \sum_{j=1}^p \mu_j \int_{-\infty}^t e^{\alpha s} \varphi_j(s) ds.$$

Dans un nouveau manuscrit avec T. Kott nous avons étudié le cas de diffusions d'Ornstein Uhlenbeck avec sauts. L'équation est donnée par

$$dX_t = (Q(t) - \alpha X_t)dt + \sigma dL_t, \quad t \geq 0, \tag{8}$$

où $\{L_t \geq 0\}$ est un processus de Lévy et

$$Q(t) = \sum_{i=1}^p \mu_i \varphi_i(t). \tag{9}$$

Comme dans le cas précédent nous estimons le vecteur de paramètres $\theta = (\mu_1, ..., \mu_p, \alpha)^t$. L'estimateur du maximum de vraisemblance est donné par une expression semblable à celle du cas continu en haut; i.e.: $\hat{\theta}_{ML}^{(T)} = Q_T^{-1} P_T$, où la matrice P_T est composée de termes qui contiennent en outre des intégrales de type

$$\int_0^T X_t \, dX_t^c$$

où X^c est la partie continue du processus X. Ces intégrales ne sont pas faciles à évaluer en partant d'une trajectoire observée. De plus cette tâche s'avère impossible si la trajectoire est observée seulement à des temps discrets. Nous avons donc utilisé une approche basée sur la méthode des plus petits carrés en passant par une discrétisation du problème pour obtenir un nouveau estimateur $\hat{\theta}_{KQ}^{(T)} = Q_T^{-1} \tilde{P}_T$ dont la matrice $\tilde{P}_T$ est composée de termes qui contiennent des intégrales de forme

$$\int_0^T X_t \, dX_t.$$

Ces expressions peuvent être calculées facilement en partant d'une trajectoire observée. De plus elles peuvent être approximées par des observations discrètes de la trajectoire. Nous avons pu démontrer la consistance de l'estimateur $\hat{\theta}_{KQ}^{(T)}$ pour une grande classe de processus de Lévy à condition que les fonctions $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_p(t)$ soient périodiques et orthogonales dans $L^2([0,1], \ell)$.

10 Mathématiques des finances et d'assurances

Les nouvelles règles de management des risques qui ont été prescrites dans l'ouvrage de règles Bâle II demandent aux assureurs de donner des estimations de probabilité de ruine au niveau de l'entreprise. Un des problèmes majeurs qui survient dans ce contexte est l'accumulation de risques dus aux différents produits que vend l'assureur. Au niveau des différents produits les répartitions des pertes sont bien connues grâce à un grand nombre de données statistiques. Le problème est d'établir une répartition conjointe qui est basée sur les répartitions marginales connues et sur très peu de données multivariées. A l'opposé des copules qui sont souvent utilisées dans ce contexte la structure de covariance peut être estimée d'une façon robuste avec peu de données. Avec M. Stolz nous examinons le pire des cas en maximisant les pertes accumulées sur toute la classe des distibutions jointes avec marginales et covariances prescrites; i.e.: nous voulons évaluer pour des mesures de probabilité $P, Q \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ et une constante $k \in \mathbb{R}$ l'expression

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}(P,Q,k)} \iint \mathbf{1}_{(-\infty,z)}(x+y)\ \mu(dx,dy), \tag{10}$$

où

$$\mathcal{M}(P,Q,k) := \left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2) : \iint xy\ \mu(dx,dy) = k,\ \mu \circ \mathrm{pr}_1^{-1} = P,\ \mu \circ \mathrm{pr}_2^{-1} = Q \right\}.$$

Nous pouvons prouver un théorème de dualité pour ce problème d'optimisation linéaire infiniment dimensionnelle:

Théorème 17 (Franke, Stolz (Preprint)) *Supposons que ℓ est borné et continu par en bas et que $P, Q \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ satisfont*

$$\int x^2\ P(dx) < \infty, \quad \int y^2\ Q(dy) < \infty.$$

Pour tout $k \in \mathbb{R}$ avec

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}(P,Q)} \iint xy\ \mu(dx,dy) \le k \le \sup_{\mu \in \mathcal{M}(P,Q)} \iint xy\ \mu(dx,dy),$$

on a que

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}(P,Q,k)} \iint \ell(x,y)\ \mu(dx,dy) = \sup_{(f,g,\alpha) \in \mathcal{U}(\ell)} \left(\int f(x)P(dx) + \int g(y)Q(dy) + \alpha k \right),$$

où

$$\mathcal{U}(\ell) := \{(f,g,\alpha) \in S(\mathbb{R}) \times S(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} : f(x) + g(y) + \alpha xy \le \ell(x,y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}\}$$

et

$$S(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C(\mathbb{R}) : f(x) \big/ (x^2 \vee 1) \text{ est bornée} \right\}.$$

Le but est d'utiliser ces résultats pour obtenir des informations sur les répartitions jointes qui maximisent le risque de l'entreprise d'être confrontée à la ruine. Par exemple nous sommes en train d'utiliser Théorème 17 pour déterminer les supports des mesures qui minimisent l'expression (10). Ceci devrait nous permettre de donner des valeurs exactes dans bon nombre de situations où les mesures P et Q sont données explicitement.

11 Références

An H.-Z., Chen Z.-G., Hannan E. J.: The maximum of the periodogram, *J. Multivariate Analysis*, **13**, (1983), 383-400.

Arai T.: A class of semi-selfsimilar processes related to random walks in random scenery, *Tokyo J. Math.*, **24**, (2001), 69-85.

Arisawa M.: Homogenization of a class of integro-differential equations with Lévy operators, *Comm. Partial Differential Equations*, **34**, (2009), 617-624.

Aubin T.: *Some Non-Linear Problems in Riemannian Geometry*, Springer Verlag Berlin, (1998).

Bhattacharya R.: A central limit theorem for diffusions with periodic coefficients, *Ann. Probab.*, **13**, (1985), 385-396.

Bhattacharya R., Götze F.: Time scales for Gaussian approximation and its breakdown under a hirarchy of periodic spatial heterogenities, *Bernoulli*, **1**, 81-123, (1995). Corrected in *Bernoulli*, **2**, 107-108, (1996).

Bérard P.: *Spectral Geometry: Direct and Invers Problems*, Lecture Notes in Mathematics, **1207**, Springer, (1986).

Bérard P., Meyer D.: Inégalitées isopérimétriques et applications, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **15**, (1982), 513-541.

Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, New-York, (1978).

Berestycki H., Hamel F., Nadirashvili N.: Elliptic eigenvalue problems with large drift and applcations to nonlinear propagation phenomena, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **253**, 451-480, (2005).

Chernick M. R.: A limit theorem for the maximum of autoregressive processes with uniform marginal distributions, *Ann. Probab.*, **9**, (1981), 145-149.

Constantin P., Kislev A., Ryzhik L., Zlatos A.: Diffusion and mixing in fluid flow, *Annals of Mathematics*, **168**, 643-674, (2008).

Davis R., Mikosch T.: The maximum of the periodogram of a non-Gaussian sequence, *Ann.Probab.*, **27**, (1999), 522-536.

Denzel G. E., O'Brian G. L.: Limit theorems for extreme values of chain dependent processes, *Ann. Probab.*, **3**, (1975), 773-779.

Ethier S., Kurtz T.: *Markov Processes: Characterization and Convergence*, John Wiley & Sons, Inc, New-York, (1986).

Gallot S.: Inégalitées isopérimétriques et analytiques sur les variétés Riemanniennes; On the geometry of differential manifolds, Rome (1986), *Astérisque*, **163-164**, 31-91, (1988).

Gnedenko B.: Sur la distribution limité du terme d'une série aléatoire, *Ann. Math.*, **44**, (1943), 423-453.

Godovan'chuk V.V.: Asymptotic probabilities of large deviations due to largejumps of a Markov process, *Theor. Probab. Appl.*, **26**, (1981), 314-327.

Haan L. de: *On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes*, Mathematical Centre Tract 32, Mathematical Centre, Amsterdam Holland.

Hairer M., Pardoux E.: Homogenization of periodic linear degenerate PDE's, *J. Funct. Anal*, **255**, (2008), 2462-2487.

Hairer M., Pavliotis G.A.: Periodic homogenization for hypoelliptic diffusions, *J. Stat. Phys.*, **117**, (2004) 261-279.

Hooghiemstra G., Keane M.: Calculation of the equilibrium distribution for a solar energy storage model, *Journal of Applied Probability*, **22**, 852-864, (1985).

Hsu E. P.: *Stochastic Analysis on Manifolds*, AMS Graduate Studies in Mathematics, **38**, (2001).

Jacod J., Shiryaev A.: "*Limit Theorems for Stochastic Processes*", Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **288**, Springer Verlag Berlin Heidelberg, (1987).

Kawazu K., Kesten H.: On birth and death processes in symmetric random environment, *J. Stat. Phys.*, **37**, (1984), 561-575.

Kesten H., Spitzer F.: A limit theorem related to a new class of self-similar processes, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, (1979), **50**, 5-25.

Kolokoltsov V.: Symmetric stable laws and stable-like jump diffusions, *Proc. London Math. Soc.*, **80**, (2000), 725-768.

Lamperti J.: On extreme order statistics, *Ann. Math. Stat.*, **4**, 1726-1737, (1964).

Lang R., Nguyen X.-X.: Strongly correlated random fields as observed by a random walker, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **64**, (1983), 327–340.

Leadbetter M.: On extreme values in stationary sequences, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **28**, (1974), 289-303.

Leadbetter M., Lindgren G., Rootzén H. (1983): *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Applied Probability, Springer-Verlag, New-York.

Le Gall J.-F., Rosen J.: The range of stable random walks, *Ann. Probab.*, **19**, (1991), 650-705.

Maejima M.: Limit theorems related to a class of operator-self-similar processes, *Nagoya Math. J.*, **142**, (1996), 161–181.

Mikosch T., Resnick S., Samorodnitsky G.: The maximum of the priodogram for a heavy tailed sequence, *Ann. Probab.*, **28**, (2000), 885-908.

O'Brian G. L.: The maximum term of a sequence of uniformly mixing stationary processes, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **30**, (1974), 57-63.

Resnick S.: *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*, Applied Probability, Springer-Verlag, New-York, (1987).

Saigo T., Takahashi H.: Limit theorems related to a class of operator semi-selfsimilar processes, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **12**, (2005), 111–140.

Shieh N.-R.: Some self-similar processes related to local times, *Statist. Probab. Lett.*, **24**, (1995), 213-218.

Tomisaki M.: Homogenization of cadlag processes, *J. Math. Soc. Japan*, **44**, (1992), 281-305.

Turkman K.F., Oliveira M.F.: Limit laws for the maxima of chain dependent sequences with positive extremal index, *Journal of Applied Probability*, **29**, 222-227, (1992).

Turkman K.F., Walker A.M.: Limit laws for the maxima of a class of quasi-stationary sequences, *Journal of Applied Probability*, **20**, 814-821, (1983).

Wentzell A.D.: *Limit Theorems on Large Deviations for Markov Stochastic Processes*, Kluver Academic Press, Dordrecht, (1990).