UBO Année universitaire 2013/2014
UFR Sciences et Techniques L1 PC, Méthodes de Calcul Différentiel
Département de Mathématiques Feuille de TD 4

Exercice I. En utilisant une ou plusieurs intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x\ln x\ dx\ ;\ \int_0^1 \arcsin x\ dx\ ;\ \int_0^1 xe^x\ dx\ ;\ \int_0^\pi \cos^2 x\ dx\ ;\ \int_1^2 \sin(\ln x)\ dx$$

$$\int_0^1 \mathrm{arctg} x\ dx\ ;\ \int_0^\pi e^x\cos x\ dx\ ;\ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}\ dx\ ;\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)\cos(5x)\ dx$$

Exercice II. En utilisant un changement de variables convenable calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\ dx\ ;\ \int_2^4 \frac{1}{x(\ln x)^2}\ dx\ ;\ \int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\ dx\ ;\ \int_1^4 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\ dx$$

$$\int_1^2 (\ln x)^2\ dx\ ;\ \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ dx\ ;\ \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\ dx\ ;\ \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{ch} x}\ dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x+\sin x}\ dx\ ;\ \int_0^\pi \frac{1}{3+2\cos x}\ dx\ ;\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\ dx$$

Exercice III. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2-3x+2}\ dx\ ;\ \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\ ;\ \int_0^1 \frac{1}{4+x^2}\ dx\ ;\ \int_1^2 \frac{1}{4-9x^2}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+5}\ dx\ ;\ \int_0^1 \frac{2x}{x^4+1}\ dx\ ;\ \int_0^1 \frac{x}{x^4+x^2+1}\ dx$$

Exercice IV. (Intégrales de Wallis) Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx.$$

1) Calculer I_0, puis I_1.

2) Montrer en intégrant par parties que pour tout $n \geq 2$, on a

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

3)En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les formules

$$I_{2k} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2k)} \frac{\pi}{2}$$

et

$$I_{2k+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2k)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k+1)} \ .$$