UBO
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année universitaire 2013/2014
L1 PC, Méthodes de Calcul Différentiel
Feuille de TD 3

Exercice I. Trouver le développement limité d'ordre 3 en 0 de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\cos x} \quad \text{et} \quad g(x) = (\sin x)\sqrt{1+x}\ .$$

En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^2}\ .$$

Exercice II. Trouver le développement limité d'ordre 3 de chacune des fonctions suivantes au point x_0 :

$$e^x \sin x \ \ (\text{ en } \ x_0 = 0) \quad , \quad \ln\cos x \ (\text{ en } x_0 = 0) \quad , \quad \sqrt{1+\sin x} \ \ (\text{ en } x_0 = 0)$$

$$\text{tg } x \ \ (\text{en } x_0 = \frac{\pi}{4}) \quad , \quad (\text{tg } x)\ln(1+x) \ (\text{ en } x_0 = 0) \quad , \quad \text{sh}\sin x - \sin\text{sh} \ \ (\text{ en } x_0 = 0).$$

Exercice III. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{2\text{tg}x - \sin 2x}{\ln(1+x^2)} \quad , \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^3+7x^2-8}{x^4+x^3-2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos x)} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\text{sh}x + \sin x - 2x}{x(\text{ch}x + \cos x - 2)} \quad , \quad \lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\frac{\pi x}{2})}\ .$$

Exercice IV. Soit f une fonction dérivable vérifiant :

$$\begin{cases} f' = \ln(1+f^2) \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

1) Montrer que les dérivées de f jusqu'à l'ordre 3 existent. Calculer $f'(0), f''(0), f'''(0)$.

2) Trouver le développement limité d'ordre 3 de f en 0.

Exercice V. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ .$$

1) Etudier les variations de f et en déduire qu'elle est bijective.

2) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. Calculer $f^{-1}(1), (f^{-1})'(1), (f^{-1})''(1)$. En déduire un développement limité de f^{-1} d'ordre 2 en $x_0 = 1$.

Exercice VI. Trouver le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction définie par

$$\sqrt{1+x} \ .$$

Vérifier que pour tout x positif, on a

$$0 \leq \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \leq \frac{x^3}{16} \ .$$