

Probabilité et Statistique

Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, normalement distribuées, avec :

$$E(X) = 0, \sigma_X = 1$$

$$E(Y) = 4, \sigma_Y = 9$$

1. Donner $E(X + Y)$ et σ_{X+Y}
2. Calculer $P(X + Y \leq 1,01)$
3. Donner $E(2X + 3Y)$ et $Var(2X + 3Y)$

Exercice 2 On tire *simultanément* trois jetons d'une urne contenant cinq jetons numérotés de 1 à 5. Soit U le plus petit et V le plus grand des numéros obtenus en un tirage.

1. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de U et V .
2. En déduire leurs espérances et variances respectives.
3. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 3

1. Le taux de glycémie dans une population donnée est distribué suivant une loi normale d'espérance 1 g/l et d'écart-type $0,3 \text{ g/l}$.

1.a. Quelle est la moyenne théorique μ du taux de glycémie dans la population ?

1.b. Etant donné un échantillon X_1, X_2, \dots, X_n correspondant à la mesure du taux de glycémie de n individus de la population, la moyenne μ peut être estimée par M_n .

Donner l'espérance de M_n ainsi que son biais.

1.c. Donner la variance de M_n .

2. On considère un échantillon de $n = 10$ individus de la population dont on mesure le taux de glycémie. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau suivant.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
gly _i	0.64	0.34	1.30	0.84	1.10	1.07	1.01	0.69	0.72	0.88

2.a. Calculer la moyenne $\hat{\mu}$ de l'échantillon.

2.b. Donner un intervalle de confiance à 99% pour la moyenne théorique μ .

Cette valeur μ appartient-elle à l'intervalle de confiance déterminé ?

Exercice 4 La capacité vitale est le volume d'air maximum pouvant être mobilisé en une seule inspiration. On la mesure en litre et on la modélise en supposant qu'elle est distribuée dans la population suivant une loi normale de moyenne inconnue et d'écart-type $0,6\text{ l}$.

Dans le tableau ci-dessous sont consignées les mesures de capacité vitale effectuées sur 10 individus de la population.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	3,9	4,15	4,3	4,35	4,6	4,8	5,05	5,2	5,5	5,7

1. Donner un intervalle de confiance à 95% pour la moyenne de la capacité vitale.
2. Quel est le nombre minimal de mesures nécessaires pour que l'estimation à 95% de la moyenne se fasse à $\pm 10\%$ près? à $\pm 5\%$ près?

Exercice 5 Un institut de sondage a observé sur un échantillon de 1600 personnes prises au hasard, 52% d'intentions de vote en faveur du candidat A.

1. Estimer la proportion d'intentions de vote en faveur du candidat A dans la population à l'aide d'un intervalle de confiance avec un degré de confiance de 95%. Que peut-on en conclure?
2. Combien de personnes faut-il interroger pour être sûr que la largeur de l'intervalle de confiance soit inférieur à 1% au degré de confiance 95%?

Exercice 6 Afin d'évaluer le nombre N d'individus d'une espèce animale vivant sur une île, on propose d'adopter la méthode de capture-recapture. Pour cela, on capture 800 individus. Ces individus, qui correspondent à la proportion p du nombre total des individus vivant sur l'île, sont marqués puis relâchés. On recapture ultérieurement 1000 animaux parmi lesquels on dénombre 250 animaux marqués lors de la première capture.

1. En utilisant les résultats obtenus lors de la deuxième capture, proposer une estimation de p ainsi qu'un intervalle de confiance à 95% ;
2. Ecrire la relation qui existe entre N et p , et en déduire une estimation de N ainsi qu'un intervalle de confiance à 95%.