UBO Année universitaire 2013/2014
UFR Sciences et Techniques L1 PC, Méthodes de Calcul Différentiel
Département de Mathématiques Feuille de TD 2

Exercice I. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \text{ ch}x - \text{sh}x$.

1) Etudier les variations de f et dessiner son graphe.

2) Montrer que f est bijective.

Exercice II. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$.

1) Justifier pourquoi f est définie sur tout $\mathbb{R}$.

2) Justifier pourquoi f est dérivable sur tour $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

3) Etudier les variations de f et dessiner son graphe.

Exercice III. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \text{arcos } x + \arcsin x$.

1) Déterminer le domaine de définition de f et calcuer sa dérivée.

2) En déduire la formule suivante :

$$\text{arcos } x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Exercice IV. Soit f la fonction numérique définie par

$$f(x) = \text{arctg } x + \text{arctg } \frac{1}{x} \ .$$

1) Déterminer le domaine de définition de f et calcuer sa dérivée.

2) En déduire la formule suivante :

$$\text{arctg } x + \text{arctg } \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

3) Vérifier que $\text{arctg}(-1 + \sqrt{2}) = \frac{\pi}{8}$. En déduire la valeur de $\text{arctg}(1 + \sqrt{2})$.

Exercice V. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \text{sh}x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Montrer que f est bijective et calculer explicitement sa fonction réciproque f^{-1}.

Exercice VI. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \ln(1 + \sin^2 x) \ .$$

1) Vérifier que f est définie sur tout $\mathbb{R}$, qu'elle est paire et périodique.

2) Donner le tableau des variations de f et tracer sa courbe représentative.

Exercice VII. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 + \ln x.$$

1) Montrer que f est strictement croissante et calculer ses limites en 0 et $+\infty$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique que l'on notera par α, et montrer que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ (On pourra utiliser l'ingalité $0,69 < \ln 2 < 0,70$.).