UBO Année universitaire 2013/2014
UFR Sciences et Techniques L1 PC, Méthodes de Calcul Différentiel
Département de Mathématiques Feuille de TD 1

Exercice I. Démontrer les formules suivantes pour la puissance d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}$ définit par $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.
1) $x^0 = 1$ pour tout $x > 0$;
2) $x^{-\alpha} = \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha = \frac{1}{x^\alpha}$ pour tout $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$;
3) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ pour tout $x > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
4) $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$ pour tout $x > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
5) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ pour tout $x > 0$, $y > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$;

Exercice II. Utiliser les théorèmes d'addition pour le sinus et le cosinus pour démontrer les formules suivantes :
1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
2) $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$;
3) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$;
4) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
5) $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
6) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

Exercice III. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x^2 - x + 4} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2+1}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \left(x + 2 - \sqrt{x^2+4x}\right) \quad ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right).$$

Exercice IV. Calculer les dérivées de chacune des fonctions suivantes et préciser les intervalles où elles sont monotones :

$$x^2 - 3x + 1 \quad ; \quad x^3 + x^2 - 4x + 2 \quad ; \quad \frac{x-2}{x^2+1} \quad ; \quad \cos^2 x \quad ; \quad \sin^2 x.$$

Exercice V. Etudier les variations de chacune des fonctions suivantes et esquisser leurs graphes

$$\frac{x}{x^2-1} \quad ; \quad \frac{\sin x}{2+\cos x} \quad ; \quad \ln(1+x^2)-x.$$

Exercice VI. Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité suivante :

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x \quad \forall x \geq 0. \tag{1}$$

Pour cela, on considère les deux fonctions f et g définies par $f(x) = \sin x - x$ et $g(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3$.

1) En étudiant les variations de f sur $[0, +\infty[$, montrer que $f(x) \leq 0 \ \ \forall x \in [0, +\infty[$.

2) En étudiant les variations de g sur $[0, +\infty[$, montrer que $g(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [0, +\infty[$.

3) En déduire l'inégalité (1).

Exercice VII. En s'inspirant de l'exercice IV, montrer l'inégalité suivante :

$$x - \frac{1}{2}x^2 \ \leq \ \ln(1+x) \ \leq \ x \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

Exercice VIII. 1) Etudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$$

et tracer son graphe (en précisant les asymptotes).

2) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-\infty, 0[$. Déduire le graphe de f^{-1} (fonction réciproque de f) de celui de f (sans étudier les variations de f^{-1}).