

## Probabilité et Statistique

### Feuille d'exercices n° 1

**Exercice 1** Chaque matin, au réveil, Jojo peut se livrer, ou non, aux activités suivantes : se raser, se brosser les dents, écouter la radio.

Appelons  $A$  l'événement "Jojo se rase",  $B$  l'événement "Jojo se brosse les dents" et  $C$  l'événement "Jojo écoute la radio".

Exprimer à l'aide des événements  $A$ ,  $B$  et  $C$ , les événements suivants :

1. Ce matin, Jojo se brosse les dents, mais n'écoute pas la radio.
2. Ce matin, Jojo n'écoute pas la radio, mais se brosse les dents.
3. Ce matin, Jojo ne se rase pas, ne se brosse pas les dents, ni n'écoute la radio.
4. Ce matin, Jojo se brosse les dents ou se rase, mais n'écoute pas la radio.
5. Ce matin, Jojo, ou bien se rase, ou bien se brosse les dents, mais, dans tous les cas, écoute la radio.
6. Ce matin, Jojo, ou bien se rase, ou bien se brosse les dents et écoute la radio.
7. Ce matin, Jojo, ou bien se rase mais n'écoute pas la radio, ou bien se brosse les dents et écoute la radio.
8. Ce matin, Jojo, ou bien ne se rase pas, ou bien il écoute la radio et se brosse les dents.
9. Ce matin, Jojo, ou bien ne se rase pas, ou bien il se rase et écoute la radio.

\* **Exercice 2** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois événements d'un univers  $\Omega$ . Simplifier :

1.  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
2.  $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B)$ .
3.  $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$ .

**Exercice 3** On se donne  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois événements (d'un univers  $\Omega$ ). En utilisant les opérations de réunion, d'intersection et de complémentaire, représenter les événements suivants :

- (a)  $A$  seul se produit.
- (b)  $A$  et  $B$  sont réalisés, mais pas  $C$ .
- (c) Les trois événements se produisent en même temps.
- (d) Au moins l'un des trois se produit.
- (e) Aucun des trois ne se produit.
- (f) Au moins deux se produisent.
- (g) Un et un seul se produit.

\* **Exercice 4** Soient  $A$  et  $B$  deux événements. Montrer que si  $A \subset B$  alors  $P(A) \leq P(B)$ .

**Exercice 5** Montrer que si  $A$  et  $B$  sont des événements d'un univers  $\Omega$  alors  $(A \cap B)$  et  $(A \cap \overline{B})$  sont incompatibles et l'on peut écrire  $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ .

**Exercice 6** Ecrire  $A \cup B$  comme la réunion de trois événements incompatibles.

**Exercice 7** En s'inspirant des exercices 5 et 6, montrer l'égalité

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

**Exercice 8** On jette simultanément une pièce de monnaie et un dé.

1. Donner un référentiel.
2. On considère les deux événements :  
A : "Obtenir pile"  
B : "Obtenir un nombre inférieur ou égal à 3".
  - Décrire  $\overline{A} \cap \overline{B}$ .
  - Donner la composition de  $A$ ,  $B$  et  $A \cap B$ .
  - Calculer  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$ ,  $P(A \setminus B)$  et  $P(A \cup B)$ .

**Exercice 9** On joue au pile ou face avec deux pièces. Soit  $X$  le nombre de piles obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
2. Calculer  $E(X)$  et  $Var(X)$ .

\* **Exercice 10** On lance huit fois une pièce de monnaie. Lorsqu'il sort pile on gagne un euro, lorsqu'il sort face 0 euro. Soit  $X$  le gain obtenu par le joueur.

1. Donner la loi de la variable aléatoire  $X$ .
2. Calculer  $E(X)$  et  $Var(X)$ .

**Exercice 11** On suppose que dans une population 20% des femmes n'ont pas d'enfants, 30% ont un seul enfant, 40% ont deux enfants et 10% ont trois enfants.

Calculer le nombre moyen d'enfants par femme et sa variance.